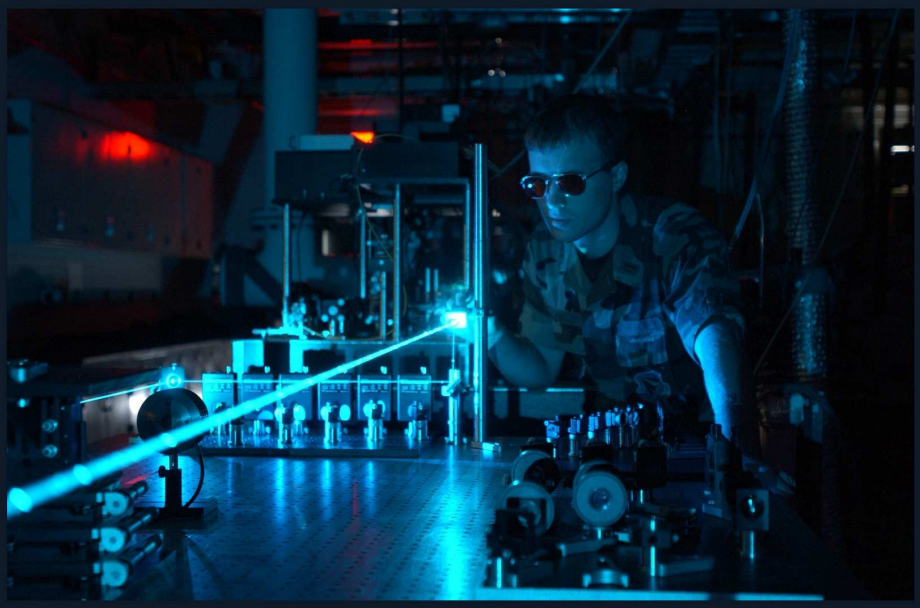
AMERICAN RESEARCH PRESS

PARTICULES DE L'UNIVERS ET AU DELÀ DU MIROIR

par
D. Rabounski et L. Borissova



Première édition en langue française

American Research Press

Dmitri Rabounski et Larissa Borissova

Particules de l'Univers et au delà du Miroir

Première édition en langue française,
traduit de la 3ème édition en anglais,
revue et complétée

Traduit de l'anglais et édité
par
Patrick Marquet
Docteur en Physique,
diplomé de la Faculté des Sciences de Paris

Rehoboth, New Mexico, USA
— 2012 —

Originally written by Dmitri Rabounski and Larissa Borissova, 2001. Translated from the 3rd expended edition of 2012, into French, and edited by Patrick Marquet, 2012. Please, send all comments on the book to the Authors or the Editor.

This book can be ordered in a paper bound reprint from :

Books on Demand, ProQuest Information and Learning
(University of Microfilm International)
300 N. Zeeb Road, P. O. Box 1346, Ann Arbor, MI 48106-1346, USA
Tel. : 1-800-521-0600 (Customer Service)
http ://wwwlib.umi.com/bod

This book can be downloaded on-line from :

Progress in Physics Bookstore (Gallup, New Mexico, USA)
http ://ptep-online.com/index_files/books.html

The Abraham Zelmanov Journal Bookstore (International)
http ://zelmanov.ptep-online.com/books.html
http ://zelmanov.org/books.html
http ://zelmanov.fr/books.html

Copyright © Dmitri Rabounski and Larissa Borissova, 2001, 2008, 2012

All rights reserved. Electronic copying, print copying and distribution of this book for non-commercial, academic or individual use can be made by any user without permission or charge. Any part of this book being cited or used howsoever in other publications must acknowledge this publication. No part of this book may be reproduced in any form whatsoever (including storage in any media) for commercial use without the prior permission of the copyright holder. Requests for permission to reproduce any part of this book for commercial use must be addressed to the Authors. The Authors retain their rights to use this book as a whole or any part of it in any other publications and in any way they see fit. This Copyright Agreement shall remain valid even if the Authors transfer copyright of the book to another party.

This book was typeset using the LaTeX typesetting system.

Cover image : "A military scientist operates a laser in a test environment". This image or file is a work of a U.S. Air Force employee, taken during the course of the person's official duties. As a work of the U.S. Federal Government, the image or file is in the public domain. See http ://www.de.afrl.af.mil/Gallery/index.aspx for details. Source : http ://en.wikipedia.org/wiki/File :Military_laser_experiment.jpg

ISBN 978-1-59973-267-1

American Research Press, Box 141, Rehoboth, NM 87322, USA
Standard Address Number : 297-5092
Printed in the United States of America

Table des Matières

Préface à l'édition française 6
Préface de l'éditeur à la troisième édition 8

Chapitre 1

Les trois sortes de particules inhérentes à l'espace pseudo-riemannien

§1.1 Position du problème 11
§1.2 Grandeurs (observables) chronométriques invariantes 16
§1.3 Particules massives et particules sans masse 28
§1.4 Espace-temps complètement dégénéré. Zéro-particules 34
§1.5 Un espace étendu pour les particules des trois types 36
§1.6 Equations du mouvement : considérations générales 40
§1.7 Equations du mouvement dans un espace étendu 42
§1.8 Equation du mouvement des géodésiques dans un espace strictement non dégénéré 46
§1.9 Un cas particulier : les équations des géodésiques 48
§1.10 Un cas particulier : les lois de Newton 50
§1.11 Analyse des équations : les transitions ultimes entre l'espace de base et le zéro-espace 54
§1.12 Analyse des équations : asymétrie de l'espace et Univers au delà du miroir 57
§1.13 Les conditions physiques caractérisant l'écoulement du temps direct et inverse 60
§1.14 Introduction de l'Univers Miroir 63
§1.15 Qui est l'observateur supraluminique ? 67
§1.16 Effondrement gravitationnel en différentes régions d'espace 69

Chapitre 2

Mouvement des particules résultant du mouvement intrinsèque de l'espace

§2.1 Propos préliminaire 72
§2.2 Position du problème 74
§2.3 Equations du mouvement et équations de Killing 75
§2.4 Conclusions 79

Chapitre 3

Déviation des lignes d'Univers. Détection des ondes gravitationnelles

§3.1 Détecteurs d'ondes gravitationnelles 81
§3.2 Un bref historique des expériences de mesures 82
§3.3 Analyse critique de l'approche de Weber 83
§3.4 Les équations principales 86
§3.5 Solution exacte pour un détecteur sans masse 88
§3.6 Solution exacte pour un détecteur massif 92
§3.7 Conclusions 95

Chapitre 4

Téléportation non quantique. Lumière figée

§4.1 Trajectoire d'un déplacement instantané. Zéro-espace : Téléportation non quantique d'un photon 97
§4.2 La structure géométrique du zéro-espace 102
§4.3 Le zéro-espace en tant que domaine des particules virtuelles. Interprétation géométrique des diagrammes de Feynman 106
§4.4 Lumière figée : les zéro-particules observées en tant qu' ondes stationnaires lumineuses 112
§4.5 Conclusions 114

Conclusions 116
Epilogue 121

Annexe A Notations d'algèbre et analyse tensorielles 123
Annexe B Solution exacte pour un détecteur d'ondes gravitationnelles. Une thèse présentée à la réunion d'Avril 2008 de l'American Physical Society 126
Annexe C Une théorie de la lumière figée selon la Relativité Générale. Une thèse présentée à la réunion de Mars 2011 de l'American Physical Society 127

Bibliographie 128

Préface à l'édition française

La motivation principale qui nous a conduit à écrire ce livre, s'est forgée principalement sur les considérations suivantes. En 1991, nous avions débuté une étude qui était destinée à dénombrer les types de particules possibles qui soient envisageables dans l'espace-temps de la relativité générale. A cette fin, nous nous sommes servis de l'appareil mathématique des invariants chronométriques (grandeurs physiquement observables), développé au cours des années 1940, par Abraham Zelmanov.

Notre étude concluait qu'en dehors des particules avec et sans masse (du genre lumière), pouvaient co-exister des particules d'un troisième type. Leurs trajectoires se situent au delà des limites des régions classiques de l'espace-temps. Pour un observateur classique, ces trajectoires sont caractérisées par des longueurs quadridimensionnelles nulles, et des longueurs tridimensionnelles observables également nulles. Par ailleurs, les intervalles du temps physiquement observable,se réduisent aussi à zéro le long de ces mêmes trajectoires. Mathématiquement, cette circonstance traduit le fait que ce type de particules occupe un espace-temps dont la métrique est complètement dégénérée (espace-temps complètement dégénéré). Nous appellerons donc cet espace, un "zéro-espace", et les particules correspondantes, les "zéro-particules".

Pour un observateur standard, le déplacement des zéro-particules dans le zéro-espace est instantané, de sorte qu'elles caractérisent une action à longue portée. En interagissant avec les particules massives ou dépourvues de masse de notre Univers, les zéro-particules peuvent transmettre instantanément des signaux en n'importe quel point de l'espace tridimensionnel (un phénomène qui peut être considéré comme une "téléportation non quantique").

Dans le cadre du dualisme onde-particules, les zéro-particules sont vues par un observateur classique, comme des ondes stationnaires, et l'ensemble du zéro-espace est alors empli d'un système d'ondes stationnaires lumineuses (zéro-particules), c'est-à-dire un hologramme lumineux stationnaire. Ce résultat est en accord parfait avec l'expérience bien connue de "lumière interrompue" (Harvard, USA, 2001).

En utilisant la méthode mathématique des grandeurs physiquement observables, nous avons aussi démontré qu'il existe deux régions distinctes de l'espace-temps inhomogène, dans lesquelles le temps (propre) physiquement observable, s'écoule vers le futur mais aussi dans le passé,

alors que cette dualité est impossible dans l'espace-temps homogène. Ces régions particulières sont désignées respectivement comme étant notre Univers et l'Univers miroir ; ces Univers sont séparés par une membrane spatio-temporelle au niveau de laquelle, le temps observable s'arrête.

Tous ces résultats sont exclusivement déduits par application de l'appareil mathématique de Zelmanov, qui porte précisément sur les grandeurs physiquement observables. Naturellement, les résultats que nous avons exploité sur ce thème par la méthode de Zelmanov, sont loin d'être définitifs. Il est possible que des études ultérieures sur le sujet, nous apportent d'autres résultats théoriques et expérimentaux.

Nous soumettons ici nos résultats à votre appréciation. C'est pourquoi la présente édition est complétée par l'introduction de données nouvelles ainsi que par trois nouveaux chapitres, un chapitre consacré aux détecteurs d'ondes gravitationnelles, un chapitre dédié aux particules virtuelles et à la téléportation non quantique, et un chapitre qui introduit la théorie de la lumière figée (associée à l'expérience de "lumière interrompue"), dans le cadre de la relativité générale.

Enfin, un aspect particulier de notre étude théorique, porte sur une possible distribution anisotrope de la vitesse observable de la lumière, pour le cas limite de la structure de l'espace pseudo-riemannien.

Pour conclure, nous aimerions ici exprimer tous nos remerciements et notre gratitude posthumes, au Dr. Abraham Zelmanov (1913–1987), ainsi qu'au professeur Kyril Stanyukovitch (1916–1989), lequel nous consacra tant d'heures d'enseignement informel. Nous sommes également reconnaissants à Kyril Dombrovski, dont les discussions et les entretiens amicaux ont grandement influencé notre perspective initiale. Nous avons de même hautement apprécié l'assistance de notre collègue Indranu Suhendro, dans la préparation et la préface des seconde et troisième éditions de ce livre. Nos remerciements particuliers s'adressent enfin à notre collègue Patrick Marquet de Paris, qui, s'intéressant de près à la téléportation non quantique, s'est engagé à traduire le présent ouvrage pour le rendre accessible aux lecteurs de langue française.

Le 7 Juillet 2012 Dmitri Rabounski et Larissa Borissova

Préface de l'éditeur à la troisième édition

"*Only through the pure contemplation ... which becomes absorbed entirely in the object, are the Ideas comprehended; and the nature of genius consists precisely in the preeminent ability for such contemplation. ... This demands a complete forgetting of our own person.*"

Arthur Schopenhauer

"*Genius does what it must, and Talent does what it can.*"

Owen Meredith

La théorie de l'espace-temps et de la gravitation formulée par Einstein, c'est-à-dire la théorie de la relativité générale, aura maintenant presque atteint une relative maturité centenaire. Cette théorie a révolutionné notre connaissance fondamentale de la structure de l'espace-temps, ainsi que celle des interactions dynamiques entre les champs d'énergie et la matière, à la lumière d'un esthétisme propre à la géométrie différentielle, et ce, après une vision du monde longtemps dominée par la mécanique de Newton, et l'électromagnétisme de Maxwell. Depuis lors, il incombe aux scientifiques les plus talentueux — les plus sincères et passionnés, de faire toute la lumière sur les quelques particularités fondamentales,voire mystérieuses, qui sont encore associées à la nature profonde de la théorie. Il n'est pas douteux que ces scientifiques si peu nombreux aujourd'hui, seront à même de combler les lacunes actuelles par des réflexions capables d'illuminer ces obscurités provisoires, et qui ne peuvent se réduire à une étincelle, ni surtout à un simple éclairage. Ces scientifiques choisis, discernent immédiatement l'aspect matériel et fondateur — comprenant à la fois les conséquences philosophique, théorique et expérimentale — de la théorie, bien avant les autres.

Les auteurs de la présente édition — comme leur éminent professeur, le Dr. Abraham Leonidovich Zelmanov, qui fût le fer de lance de l'école soviétique en matière de relativité générale et cosmologie, — sont très certainement parmi les rares détenteurs de ces qualités, dans le domaine de la relativité d'Einstein. Les deux physiciens sont en effet dotés d'une immense créativité alliée à une intégrité authentique, et dont la clarté intellectuelle leur permet d'acquérir une dimension physico-mathématique permanente, dans la droite ligne de l'école de Zelmanov.

Entre la pléthore de faux semblants couramment répandus dans maintes sophistications à outrance du concept de l'Univers, et une approche modérée des problèmes posés par la relativité générale et la gravitation, le discernement doit devenir une véritable qualité de science épistémologique. Bien entendu, cette faculté de discernement ne doit pas occulter l'éventualité d'une possible généralisation de la théorie d'Einstein, dans la perspective d'unifier (de géométriser) la gravitation avec d'autres champs physiques, y compris avec les constituants de la matière.

En dépit du fait que la théorie a été vérifiée par diverses expérimentations simples, tangibles et largement associées aux systèmes de référence humains, la raison majeure de la longue "période d'incubation scientifique" de la relativité générale, réside dans son aspect philosophique associé à une abstraction récurrente de la théorie au regard de notre place dans l'Univers. Néanmoins, il convient de distinguer entre les chercheurs d'antan issus de la pensée propre d'Einstein et culminant avec celle de Zelmanov, et une majorité de scientifiques d'aujourd'hui, qui ont une approche plus pertinente de la dimension humaine expérimentale, dans notre regard sur le Cosmos.

Quatre au moins des problèmes inhérents à la relativité générale, sont abordés et résolus dans cet ouvrage. Les auteurs s'attachent à définir les types de particules qui sont en théorie compatibles avec la structure de l'espace-temps de la relativité générale, non homogène, anisotrope, et simplement non connexe (comprenant divers genres de variétés pseudo-Riemanniennes dégénérées et de zéro-particules). Pour ce faire, ils analysent d'abord la dynamique de ces particules (couvrant les mouvements géodésique et non géodésique), et étudient ensuite les ondes gravitationnelles au travers d'une modification substantielle de la conception des détecteurs après quoi, leur formidable théorie relativiste de la lumière figée (particulière à cette édition), se trouve définitivement validée par les expériences d'interruption (ou de ralentissement) de la propagation lumineuse.

Il convient de souligner que tandis que nous surnageons dans un océan de problèmes cosmiques, on doit rendre grâce à Zelmanov de nous avoir légué un appareil physico-mathématique puissant, la théorie des invariants chronométriques. Bien plus que les seules projections de grandeurs spatio-temporelles (c'est-à-dire des représentations mathématiques de grandeurs tensorielles) sur les lignes de coordonnées de l'observateur, la nature intime de cet appareil se révèle au contraire non triviale. L'échafaudage complet de la théorie des invariants chronométriques nous permet en effet (pour une minorité de ceux qui l'assi-

milent réellement), de représenter la relativité générale sous la forme élégante de grandeurs semi-tridimensionnelles (donc "chronométriques"), à partir desquelles l'observateur fondamental, vu comme un "assemblage" d'espace-temps en co-mouvement, se déplace, se déforme, entre en rotation en même temps que l'Univers dans son ensemble, tout en occupant un espace dynamique infinitésimal de ce dernier. Le fait qu'un tel observateur soit un élément à part entière de la théorie, comme c'est déjà le cas pour la mécanique quantique, lui confère une position particulière en comparaison d'un point dynamique immuable et abstrait qui se rajoute simplement au substrat de l'espace-temps. Cette circonstance va alors servir à édifier un formalisme basé sur un vecteur appelé ici monade, dans le cadre de la relativité générale.

C'est donc avec une certaine fierté, que j'ai le grand privilège d'éditer cette 3ème édition du morceau d'anthologie écrit par les Drs. Rabounski et Borissova, dont une grande partie a déjà été traitée dans leur ouvrage de référence *Champs, Vide, et Univers Miroir*[1,2].

11 Avril 2012

Indranu Suhendro

Secrétaire, du Journal pour la relativité générale, la cosmologie et la gravitation d'Abraham Zelmanov

1. Borissova L. et Rabounski D. Champs, Vide, et Univers Miroir. American Research Press, Rehoboth (NM), 2010, 263 pages (traduit de l'anglais par Patrick Marquet).

2. Borissova L. and Rabounski D. Fields, Vacuum, and the Mirror Universe. 2nd edition, Svenska fysikarkivet, Stockholm, 2009, 260 pages.

Chapitre 1

Les trois sortes de particules inhérentes à l'espace pseudo-riemannien

§1.1 Position du problème

Dans toute théorie de la dynamique, le mouvement des particules implique la détermination des coordonnées tridimensionnelles (spatiales) à un instant donné. Dans cette perspective, il est essentiel d'avoir à l'esprit trois points majeurs. En premier lieu, il convient de savoir dans quel type d'espace-temps se produisent les évènements. La structure géométrique de l'espace et du temps doit être reconnue par avance à la manière d'une route à emprunter. En second lieu, on doit connaître les propriétés physiques des particules en mouvement. Enfin, en troisième lieu, il est impératif de connaître les équations du mouvement de certains types donnés de particules.

Le premier problème conduit en réalité au choix d'un espace parmi l'ensemble des espaces connus en mathématiques et dont la géométrie de l'espace et du temps soit la plus appropriée pour décrire l'Univers observé.

La perception de l'Univers en tant que continuum d'espace-temps tire ses origines de la conférence historique de Hermann Minkowski *Raum und Zeit* donnée le 21 septembre 1908 à Cologne en Allemagne, lors de la 80tième Assemblée de la Société Allemande des Scientifiques de la Nature et des Médecins (Die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte). Lors de cette conférence, la notion *d'espace-temps* fût pour la première fois introduite en physique, et présentée comme une interprétation géométrique du principe d'invariance de la vitesse de la lumière, et des transformations de Lorentz.

Quelques années après, en 1912, Marcel Grossmann durant une conversation privée avec son ami Albert Einstein, proposa la géométrie riemannienne comme décrivant celle de l'Univers observé. Plus tard, Einstein parvint à l'aboutissement ultime de son oeuvre que constitue la théorie de la relativité générale : C'est le concept de "géométrisation de l'Univers" selon lequel la structure géométrique de l'espace-temps détermine toutes les propriétés de l'Univers. L'achèvement de la relativité générale en 1915 constitua ainsi la première théorie géométrique

portant sur l'espace-temps et le mouvement des particules, depuis l'aube de la science contemporaine.

S'inspirant de ces considérations et vérifiées depuis par l'expérience, Einstein en conclut que l'espace-temps ne peut être représenté que par un *espace pseudo-riemannien* de signature alternée $(+---)$ ou $(-+++)$ (un axe des temps et trois axes spatiaux). Cet espace est un cas particulier d'une famille d'espaces de Riemann où la géométrie est riemannienne (le carré de la distance ds^2 entre deux points très proches est fixé par la métrique $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = inv$). Dans cet espace, les axes de coordonnées peuvent être définis de plusieurs manières. L'espace pseudo-riemannien quadridimensionnel est particulier en ce sens que ses dimensions spatiales perçues en tant qu'espace, sont distinctes du quatrième axe — le temps.

Du point de vue mathématique on a donc trois axes réels d'espace, et un axe imaginaire du temps (ou vice versa), et ce choix est arbitraire.

Le cas particulier de l'espace pseudo-riemannien quadridimensionnel plan, homogène et isotrope, est celui de l'*espace de Minkowski*. C'est l'espace de la relativité restreinte, un cas tout à fait abstrait, qui est dépourvu de champs gravitationnels, de rotation, et de courbure. En général, l'espace pseudo-riemannien réel est courbe, non uniforme et anisotrope. C'est l'espace-temps de base de la relativité générale où l'on rencontre à la fois le champ gravitationnel, la rotation, la déformation et la courbure.

Par conséquent, la relativité générale est batie sur une vision de l'Univers qui l'identifie a l'espace-temps quadridimensionnel où tout objet possède à la fois un volume spatial, mais aussi une "longueur temporelle". Chaque corps physique (le nôtre inclu), est un véritable modèle existant à quatre dimensions qui se présente sous la forme d'un cylindre allongé dans le temps (cylindre des évènements successifs de ce corps), et qui est créé par complexification à partir d'autres cylindres à l'instant de sa "naissance", se dissociant en plusieurs autres, au moment de sa "fin". Par exemple, pour un humain, sa "longueur temporelle" n'est rien d'autre que sa durée de vie à partir de sa conception jusqu'à sa mort.

Peu après qu'Eddington ait mis en évidence la première preuve empirique de l'incurvation des rayons lumineux par les champs gravitationnels en 1919, de nombreux scientifiques rencontrèrent de sérieuses difficultés quant à confronter ces résultats observationnels avec la théorie de la relativité générale. Depuis maintenant près de 80 ans, les succès des vérifications expérimentales ont explicitement montré que l'espace pseudo-riemannien est bien l'espace temps de base de notre Univers observable. (Pour autant que la précison des mesures d'aujourd'hui nous

permette d'en juger.) Pourtant, si l'inévitable évolution de la civilisation et de la pensée, ainsi que celle de la technologie montre que l'espace pseudo-riemannien quadridimensionnel ne suffit plus à expliquer les nouveaux résultats expérimentaux, alors nous devons être amenés à considérer un espace plus général pour lequel l'espace pseudo-riemannien ne serait qu'un cas particulier.

Dans cet ouvrage, nous nous concentrerons sur l'étude du mouvement des particules sous l'aspect géométrique de la structure de notre Univers : nous supposerons que la structure géométrique de l'espace-temps détermine ainsi toutes les propriétés de l'Univers observé. Par conséquent, à l'inverse de la plupart des théoriciens, nous nous affranchirons ici des contraintes usuelles de la géométrie d'espace-temps, en traitant les problèmes selon les modalités d'une géométrie d'espace-temps appropriée.

Il s'ensuit qu'une particule évoluant dans l'espace-temps correspond à sa propre ligne d'Univers qui détermine les coordonnées de sa ligne spatiale tridimensionnelle, à chaque instant. De ce fait, notre finalité qui consiste à déterminer ici les différentes sortes de particules va évoluer vers celle de l'analyse de leurs trajectoires dynamiques telles que permises dans l'espace-temps quadridimensionnel.

D'une façon générale, en termes d'équations dynamiques d'une particule libre dans une métrique d'espace (espace-temps), on parlera *d'équations de lignes géodésiques* que sont les équations quadridimensionnelles de la trajectoire d'Univers d'une particule libre [1]

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\rho^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\rho}\frac{dx^\nu}{d\rho} = 0\,, \tag{1.1}$$

où les $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sont les symboles de Christoffel de deuxième espèce et ρ est un paramètre de dérivation le long de la ligne géodésique.

Du point de vue géométrique, les équations des lignes géodésiques sont les équations de transport parallèle au sens de Levi-Civita [1] du vecteur dynamique quadridimensionnel

$$Q^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\rho}\,, \tag{1.2}$$

c'est-à-dire les équations suivantes

$$\frac{\mathrm{D}Q^\alpha}{d\rho} = \frac{dQ^\alpha}{d\rho} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}Q^\mu\frac{dx^\nu}{d\rho} = 0\,, \tag{1.3}$$

1. Dans cet ouvrage, les indices d'espace-temps sont grecs, par exemple $\alpha, \beta, = 0, 1, 2, 3$ alors que les indices spatiaux sont latins, par exemple $i, k = 1, 2, 3$.

où $\mathrm{D}Q^\alpha = dQ^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} Q^\mu dx^\nu$ est la différentielle absolue du vecteur dynamique Q^α parallèlement transporté le long de la trajectoire de transport (ligne géodésique).

Lors du transport parallèle de Levi-Civita, la longueur du vecteur transporté demeure inchangée

$$Q_\alpha Q^\alpha = g_{\alpha\beta}\, Q^\alpha Q^\beta = const\,, \tag{1.4}$$

le long de toute la trajectoire d'Univers, où $g_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique fondamental de l'espace.

A ce point, il convient de noter que les équations des géodésiques sont purement dynamiques car elles ne contiennent aucune propriété physique des objets en mouvement. Afin d'avoir une image complète des particules en mouvement, nous devons donc construire des *équations dynamiques du mouvement* qui une fois résolues, nous renseigneront non seulement sur leurs trajectoires, mais également sur leurs propriétés (énergie, fréquence, etc.).

Pour ce faire, nous devrons définir : a) les types possibles de trajectoires dans l'espace-temps quadridimensionnel (pseudo-espace de Riemann), b) le vecteur dynamique pour chaque type de trajectoire, c) le paramètre de dérivation qui s'y rattache.

En premier lieu, nous envisageons les trajectoires possibles de l'espace pseudo-riemannien quadridimensionnel. Le long d'une ligne géodésique, la condition $g_{\alpha\beta}\, Q^\alpha Q^\beta = const$ est vérifiée. Lorsque $g_{\alpha\beta}\, Q^\alpha Q^\beta \neq 0$ ces ligne sont dites *non-isotropes*.

Le long de ces lignes géodésiques, le carré de l'intervalle d'espace-temps est non nul

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \neq 0 \tag{1.5}$$

et l'intervalle ds prend la forme

$$ds = \sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta} \qquad \text{si} \quad ds^2 > 0\,, \tag{1.5}$$

$$ds = \sqrt{-\, g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta} \quad \text{si} \quad ds^2 < 0\,. \tag{1.6}$$

Pour $g_{\alpha\beta}\, Q^\alpha Q^\beta = 0$, les lignes géodésiques sont appelées *géodésiques isotropes*. Le long de ces géodésiques, le carré de l'intervalle quadridimensionnel est nul

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 = 0\,, \tag{1.7}$$

tandis que l'intervalle tridimensionnel (spatial) $d\sigma$ et l'intervalle de temps physiquement observable $d\tau$ ne sont pas nuls (les trajectoires sont

dégénérées de façon particulière).

Ainsi s'achève la liste des types de trajectoires dans l'espace pseudo-riemannien quadridimensionnel (espace-temps de base de la relativité générale) classiquement répertoriés par les scientifiques.

En dehors de cette courte description, nous allons montrer que d'autres trajectoires sont possibles, à savoir celles dont les intervalles spatiaux et temporels observables sont chacun nuls. Ces dernières trajectoires se situent en dehors de l'espace-temps pseudo-riemannien et sont caractéristiques d'une région d'espace-temps dégénérée. Nous disons région "dégénérée", car par rapport à un observateur standard, les distances et les intervalles de temps dans une telle région dégènèrent en se réduisant à zéro. Néanmoins, la transition de l'espace-temps pseudo-riemannien vers ces régions dégénérées est réalisable (sous certaines conditions physiques). Probablement, pour un observateur qui évolue dans cette région d'espace-temps dégénérée, les termes "temps" et "espace" ne sont pas vides de sens, mais mesurés dans des unités différentes.

Nous pourrons donc considérer l'espace-temps pseudo-riemannien et la région d'espace dégénérée (désormais simplement notée espace-temps) en tant qu'espace commun que nous appellerons *espace-temps étendu* et dans lequel co-existent les trajectoires dégénérées et non dégénérées (isotropes et non isotropes).

Dans un tel espace-temps étendu, trois types de trajectoires sont permises :

1) Trajectoires non isotropes (espace pseudo-riemannien) le long desquelles sont admises les mouvements à vitesses subluminiques et supraluminiques ;
2) Trajectoires isotropes (espace pseudo-riemannien) qui n'admettent que les mouvements à vitesse luminique ;
3) Trajectoires complètement dégénérées (zéro-trajectoires) qui se situent dans l'espace-temps entièrement dégénéré.

A ces trajectoires sont associées trois types de particules qui co-existent dans le 4-espace-temps :

1) Les particules massives (masse au repos $m_0 \neq 0$) se déplaçant le long de trajectoires non isotropes ($ds \neq 0$) à des vitesses subluminiques (particules massives réelles) et à des vitesses supraluminiques (particules massives imaginaires — tachyons) ;
2) Les particules dépourvues de masse (masse au repos $m_0 = 0$) se déplaçant le long de trajectoires isotropes à la vitesse de la lumière ($ds = 0$). Ce sont les particules du genre lumière (ex. photons) ;

3) Les particules de la 3ème catégorie se déplacent elles, dans l'espace-temps complètement dégénéré.

Par ailleurs, du seul point de vue mathématique, les équations de ces lignes géodésiques contiennent le même vecteur Q^α et le paramètre ρ quelque soit le type de trajectoire isotrope ou non isotrope. Ceci montre qu'il doit exister une forme commune d'équations dynamiques pour les particules avec et sans masse. Nous allons donc rechercher une probable généralisation de ces équations du mouvement.

Au prochain paragraphe, nous établirons les bases de l'appareil mathématique décrivant les quantités physiquement observables (invariants chronométriques), appareil qui nous servira d'outil tout au long de cet ouvrage. Au §1.3, nous démontrerons l'existence d'un vecteur dynamique et d'un paramètre de dérivation généralisés qui sont communs aux particules avec et sans masse. Le §1.4 sera lui, consacré aux conditions physiques de dégénérescence complète d'un espace pseudo-riemannien. Au §1.5, nous considérerons les propriétés des particules dans un 4-espace-temps étendu qui admet une métrique entièrement dégénérée. Nous obtiendrons ensuite aux §1.6–§1.8 les équations dynamiques chronologiquement invariantes du mouvement, valables pour toutes les particules se déplaçant dans l'espace-temps étendu. Aux §1.9 et §1.10, nous montrerons que l'équation des géodésiques et la loi de Newton de la mécanique classique ne sont que des cas particuliers de ces équations dynamiques. Les §1.11 et §1.12 porteront sur deux aspects des équations déduites : 1) les conditions qui permettent de passer de l'espace-temps étendu à l'espace-temps standard ; 2) l'asymétrie de mouvement entre le futur (écoulement du temps direct) et le passé (écoulement du temps inversé). Aux §1.13 et §1.14, nous traiterons des conditions physiques de l'écoulement direct et indirect du temps. Enfin, au cours des §1.15 et §1.16, seront discutés certains cas spécifiques, comme ceux de l'observateur supraluminique et du collapse gravitationnel.

§1.2 Grandeurs (observables) chronométriques invariantes

Toute description phénoménologique par une théorie physique, nécessite d'exprimer les résultats en termes de grandeurs physiques réelles qui peuvent être expérimentalement mesurées (*grandeurs physiquement observables*). En relativité générale, ce problème est loin d'être trivial, car tout en observant les objets dans un espace-temps quadridimensionnel, nous devons déterminer quelles composantes du 4-tenseur attaché à la grandeur, sont physiquement observables.

Le problème se résume alors comme suit. Toutes les équations de la relativité générale s'écrivent sous *forme généralement covariantes*, qui sont indépendantes du choix du référentiel. Ces équations ainsi que les variables qui y sont contenues, sont quadridimensionnelles. La question est alors de distinguer parmi ces variables quadridimensionnelles, celles qui peuvent être observables lors d'expériences physiques réelles, c'est-à-dire les grandeurs physiquement observables.

Intuitivement, on peut supposer que les composantes tridimensionnelles d'un tenseur quadridimensionnel constituent une grandeur physiquement observable. Parallèlement, on ne peut pas être sûr que ce que nous observons soient réellement les composantes tridimensionnelles envisagées, ou même d'autres variables plus complexes dépendant de facteurs extérieurs comme par exemple les propriétés physiques classiques de l'espace-temps de référence.

De plus, un quadrivecteur (tenseur de rang 1), possède au moins 4 composantes (1 composante temporelle et 3 composantes spatiales). Un tenseur de rang 2, représentant par exemple un tenseur de rotation ou de déformation, possède 16 composantes : 1 composante temporelle, 9 composantes spatiales, 6 composantes mixtes (spatio-temporelles). Dans ce cas, peut-on affirmer que les composantes mixtes sont des grandeurs physiquement observables ? Il s'agit là d'une autre question qui n'appelle apparemment pas de réponse définie. Les tenseurs de rang supérieur ont du reste davantage de composantes ; par exemple, le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel possède 256 composantes et donc, la reconnaissance heuristique des diverses composantes physiquement observables devient beaucoup plus compliquée. D'autre part, la distinction entre les composantes covariantes observables d'un tenseur à indices inférieurs et celles des composantes mixtes à indices inférieurs et supérieurs, demeure un obstacle majeur.

Nous voyons donc que la définition des observables physiques en relativité générale est loin d'être un problème trivial. Il serait évidemment souhaitable de disposer d'un appareil mathématique idéal qui puisse déterminer les observables quelque soit le rang du tenseur considéré, et ce, sans ambiguïté d'aucune sorte.

Vers le milieu des années 1930, plusieurs tentatives furent initiées par des scientifiques éminents dans la recherche de telles méthodes. Le but fût presque atteint par Landau et Lifshitz dans leur fameux ouvrage *Théorie des Champs* d'abord publié en Russie en 1939. Parallèlement à l'analyse du même du problème des grandeurs physiquement observables, au §84, les auteurs introduisent les notions de temps physiquement observable et d'intervalle spatial tridimensionnel également obser-

vable qui sont étroitement dépendants des propriétés physiques (au sens classique) de l'espace de référence d'un observateur. A l'époque, toutes ces ébauches se limitèrent exclusivement à la résolution de certains problèmes particuliers. Aucune d'entre elles n'aboutit au développement d'un appareil mathématique généralisateur.

Il faudra attendre 1944, pour que Abraham Zelmanov échafaude une théorie mathématique de calcul des observables physiques dans un espace pseudo-riemannien à quatre dimensions et qui sera connue sous le nom de *Théorie des Invariants Chronométriques*. Cette appareil mathématique fût à l'origine, présenté la même année dans le cadre de sa thèse de doctorat [2] où il est exposé en détails, puis dans d'autres publications plus courtes en 1956–1957 [3, 4].

Indépendamment, le mathématicien italien Carlo Cattaneo [5–8] parvint aux mêmes résultats et publia son premier article sur ce thème en 1958 [5]. Cattaneo apprécia grandement la théorie des invariants chronométriques de Zelmanov à laquelle il fit référence dans sa dernière publication (1968) [8].

L'essence de l'appareil mathématique de Zelmanov se rapportant aux grandeurs physiquement observables (invariants chronométriques) et appliqué à l'espace-temps pseudo-riemannien, peut être défini comme suit : en chaque point de l'espace-temps, nous pouvons placer une *section spatiale tridimensionnelle* $x^0 = ct = const$ (espace à trois dimensions), orthogonale à une *ligne de temps* donnée $x^i = const$. Si la section spatiale est partout orthogonale aux lignes de temps qui la traverse en chaque point, l'espace ainsi défini est appelé *holonome*. Dans le cas contraire (sections spatiales non orthogonales aux lignes temporelles), l'espace sera dit *non-holonome*. Un observateur réel peut posséder un système de référence qui est sous-tendu par un réseau de coordonnées (rattaché à son corps physique ou dans son voisinage) ainsi qu'une horloge réelle située à chaque point de ces coordonnées. Le réseau de coordonnées et l'horloge représentent tous les deux un ensemble de référentiels dans lequel l'observateur effectue ses observations. Par suite, toute grandeur physiquement observable telle qu'elle est mesurée par un observateur devra obligatoirement être le résultat d'une véritable "projection" ("chrono-métrique") de grandeurs quadridimensionnelles sur la ligne de temps et sur la section spatiale (temps et espace à trois dimensions) du corps de référence de l'observateur particulier.

L'opérateur de projection sur la ligne de temps d'un observateur est le quadrivecteur vitesse d'Univers

$$b^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \tag{1.8}$$

de son corps de référence par rapport à lui-même. Ce vecteur d'Univers, est tangent à la ligne d'Univers de l'observateur en chaque point de sa trajectoire, c'est donc un vecteur unité

$$b_\alpha b^\alpha = g_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = \frac{g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta}{ds^2} = +1\,. \tag{1.9}$$

L'opérateur de projection de l'observateur sur sa section d'espace (son espace tridimensionnel local) est donné par le tenseur symétrique quadridimensionnel $h_{\alpha\beta}$

$$\left.\begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= -\,g_{\alpha\beta} + b_\alpha b_\beta \\ h^{\alpha\beta} &= -\,g^{\alpha\beta} + b^\alpha b^\beta \\ h^\beta_\alpha &= -\,g^\beta_\alpha + b_\alpha b^\beta \end{aligned}\right\}. \tag{1.10}$$

Le vecteur b^α et le tenseur $h_{\alpha\beta}$ sont orthogonaux. Mathématiquement, cette propriété exprime la nullité de leur contractions mutuelles

$$\left.\begin{aligned} h_{\alpha\beta}\,b^\alpha &= -\,g_{\alpha\beta}\,b^\alpha + b_\alpha b^\alpha b_\beta = -\,b_\beta + b_\beta = 0 \\ h^{\alpha\beta} b_\alpha &= -\,g^{\alpha\beta}\,b_\alpha + b^\beta b_\alpha b^\alpha = -\,b^\beta + b^\beta = 0 \\ h^\alpha_\beta\,b_\alpha &= -\,g^\alpha_\beta\,b_\alpha + b_\beta\,b^\alpha b_\alpha = -\,b_\beta + b_\beta = 0 \\ h^\beta_\alpha\,b^\alpha &= -\,g^\beta_\alpha\,b^\alpha + b^\beta b_\alpha b^\alpha = -\,b^\beta + b^\beta = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{1.11}$$

c'est-à-dire

$$b_\alpha b^\alpha = +1\,, \qquad h^\beta_\alpha\,b^\alpha = 0\,. \tag{1.12}$$

Si l'observateur est au repos par rapport à son objet de référence (ce qui constitue *le référentiel d'accompagnement*), alors $b^i = 0$ dans ce système de référence. Les réseaux de coordonnées de la même section d'espace sont reliés entre eux par les transformations

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x}^0 &= \tilde{x}^0\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \\ \tilde{x}^i &= \tilde{x}^i\left(x^1, x^2, x^3\right), \quad \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^0} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

où la troisième équation révèle que les trois coordonnée spatiales tildées sont indépendantes du temps du réseau non tildé, ce qui équivaut à un réseau de coordonnées où les lignes de temps sont fixes, $x^i = const$ en chaque point. La transformation des coordonnées spatiales n'est rien d'autre que la transition d'un réseau vers un autre à l'intérieur de la même section d'espace. La transformation du temps signifie elle, le chan-

gement de l'ensemble des horloges, c'est-à-dire une transition vers une autre section d'espace (un autre espace tridimensionnel de référence). En pratique, il s'agit du remplacement d'un corps de référence avec toutes ses caractéristiques physiques, par un autre corps auquel sont rattachés d'autres caractéristiques physiques. Cependant, le fait d'employer d'autres caractéristiques, conduira l'observateur à mesurer des résultats différents (autres grandeurs observables). Par conséquent, les projections physiquement observables dans un référentiel d'accompagnement devraient être invariantes par rapport à une transformation du temps, c'est-à-dire par rapport aux transformations (1.13). En d'autres termes, de telles grandeurs doivent posséder la propriété *d'invariance chronométrique*.

Nous appellerons donc les grandeurs physiquement observables rattachées au référentiel d'accompagnement, des *grandeurs chronométriquement invariantes* ou simplement des *invariants chronométriques*.

Le tenseur $h_{\alpha\beta}$ envisagé dans le référentiel d'accompagnement d'un observateur possède toutes les propriétés attribuées au tenseur métrique fondamental, à savoir

$$h_i^\alpha h_\alpha^k = \delta_i^k - b_i b^k = \delta_i^k\,, \qquad \delta_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

où δ_i^k est le tenseur unité tridimensionnel[2]. Il en résulte que dans le référentiel d'accompagnement, les indices du tenseur tridimensionnel h_{ik} peuvent être élevés ou abaissés à l'aide des grandeurs chronométriquement invariantes.

Les propriétés principales des opérateurs de projection dans ce référentiel d'accompagnement sont donc

$$b_\alpha b^\alpha = +1\,, \qquad h_\alpha^i b^\alpha = 0\,, \qquad h_i^\alpha h_\alpha^k = \delta_i^k\,. \tag{1.15}$$

Toujours dans ce référentiel, calculons les composantes de ces opérateurs. La composante b^0 provient manifestement de la condition $b_\alpha b^\alpha = g_{\alpha\beta} b^\alpha b^\beta = 1$, qui devient dans le référentiel d'accompagnement ($b^i = 0$), $b_\alpha b^\alpha = g_{00} b^0 b^0 = 1$. Celle-ci s'écrit avec les composantes au repos de b^α

$$\left.\begin{aligned} b^0 &= \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\,, & b^i &= 0 \\ b_0 &= g_{0\alpha} b^\alpha = \sqrt{g_{00}}\,, & b_i &= g_{i\alpha} b^\alpha = \frac{g_{i0}}{\sqrt{g_{00}}} \end{aligned}\right\}, \tag{1.16}$$

2. C'est la partie tridimensionnelle δ_i^k du 4-tenseur δ_β^α qui permet d'échanger les indices.

tandis que les composantes de $h_{\alpha\beta}$ sont

$$\left.\begin{array}{lll} h_{00} = 0\,, & h^{00} = -\,g^{00} + \dfrac{1}{g_{00}}\,, & h^0_0 = 0 \\ h_{0i} = 0\,, & h^{0i} = -\,g^{0i}, & h^i_0 = \delta^i_0 = 0 \\ h_{i0} = 0\,, & h^{i0} = -\,g^{i0}, & h^0_i = \dfrac{g_{i0}}{g_{00}} \\ h_{ik} = -\,g_{ik} + \dfrac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}\,, & h^{ik} = -\,g^{ik}, & h^i_k = -\,g^i_k = \delta^i_k \end{array}\right\}. \quad (1.17)$$

Zelmanov a développé une méthode de calcul commune permettant de calculer les projections chronométriquement invariantes (physiquement observables) de n'importe quelle grandeur tensorielle généralement covariante (quatre dimensions), et dont il a tiré un théorème (*Théorème de Zelmanov*) :

> Théorème de Zelmanov :
> On considère que $Q^{ik\ldots p}_{00\ldots 0}$ sont les composantes d'un tenseur quadridimensionnel $Q^{\mu\nu\ldots\rho}_{00\ldots 0}$ de rang r, avec les indices supérieurs non nuls, tandis que les m indices inférieurs sont tous nuls. Les grandeurs tensorielles
>
> $$T^{ik\ldots p} = (g_{00})^{-\frac{m}{2}}\, Q^{ik\ldots p}_{00\ldots 0} \quad (1.18)$$
>
> forment un 3-tenseur contravariant chr.inv. de rang $(r-m)$. Il en découle que le tenseur $T^{ik\ldots p}$ représente une projection m-multiple sur les lignes de temps par l'intermédiaire des indices $\alpha, \beta \ldots \sigma$ ainsi qu'une projection sur les sections spatiales par l'intermédiaire des $r-m$ indices $\mu, \nu \ldots \rho$ du tenseur initial $Q^{\mu\nu\ldots\rho}_{\alpha\beta\ldots\sigma}$.

Une conséquence immédiate de ce théorème est que les projections chronométriquement invariantes (observables physiques) du 4-vecteur Q^α sont les quantités

$$b^\alpha Q_\alpha = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad h^i_\alpha Q^\alpha = Q^i, \quad (1.19)$$

tandis que les projections chronométriquement invariantes d'un tenseur symétrique du second rang $Q^{\alpha\beta}$, sont

$$b^\alpha b^\beta Q_{\alpha\beta} = \frac{Q_{00}}{g_{00}}\,, \qquad h^{i\alpha} b^\beta Q_{\alpha\beta} = \frac{Q^i_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad h^i_\alpha h^k_\beta\, Q^{\alpha\beta} = Q^{ik}. \quad (1.20)$$

Les projections chr.inv. d'un intervalle de coordonnées à 4 dimen-

sions dx^α, sont d'une part l'intervalle de temps physiquement observable

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt + \frac{g_{0i}}{c\sqrt{g_{00}}}\, dx^i, \tag{1.21}$$

et l'intervalle des coordonnées observables dx^i ici identiques aux coordonnées spatiales. La vitesse physiquement observable d'une particule est le 3-vecteur chr.inv.

$$\mathrm{v}^i = \frac{dx^i}{d\tau}\,, \qquad \mathrm{v}_i\mathrm{v}^i = h_{ik}\,\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = \mathrm{v}^2, \tag{1.22}$$

qui, pour des trajectoires isotropes, devient le 3-vecteur chr.inv. de la vitesse de la lumière physiquement observable

$$c^i = \mathrm{v}^i = \frac{dx^i}{d\tau}\,, \quad c_i c^i = h_{ik}\, c^i c^k = c^2. \tag{1.23}$$

Projetant le tenseur métrique fondamental covariant ou contravariant sur la section d'espace du référentiel d'accompagnement ($b^i = 0$)

$$\left.\begin{aligned} h_i^\alpha h_k^\beta\, g_{\alpha\beta} &= g_{ik} - b_i b_k = -\, h_{ik} \\ h_\alpha^i h_\beta^k\, g^{\alpha\beta} &= g^{ik} - b^i b^k = g^{ik} = -\, h^{ik} \end{aligned}\right\}, \tag{1.24}$$

on trouve que la grandeur chr.inv.

$$h_{ik} = -\, g_{ik} + b_i b_k \tag{1.25}$$

constitue le *tenseur métrique chr.inv.* (*tenseur métrique observable*) avec lequel on peut élever ou abaisser l'indice de n'importe quelle quantité tensorielle tridimensionnelle chr.inv. dans le référentiel d'accompagnement. Ses composantes contravariantes et mixtes s'écrivent

$$h^{ik} = -\, g^{ik}, \qquad h_k^i = -\, g_k^i = \delta_k^i\,. \tag{1.26}$$

Si nous exprimons $g_{\alpha\beta}$ à l'aide de la définition $h_{\alpha\beta} = -\, g_{\alpha\beta} + b_\alpha b_\beta$, nous trouvons la formule de l'intervalle quadridimensionnel sous la forme

$$ds^2 = b_\alpha b_\beta\, dx^\alpha dx^\beta - h_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta, \tag{1.27}$$

c'est-à-dire en fonction des opérateurs de projection b_α et $h_{\alpha\beta}$. Dans cette formule, $b_\alpha dx^\alpha = c\, d\tau$, d'où pour le premier terme $b_\alpha b_\beta\, dx^\alpha dx^\beta = c^2 d\tau^2$. Le second terme $h_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = d\sigma^2$ dans le référentiel d'accompagnement est le carré de l'intervalle tridimensionnel observable[3]

$$d\sigma^2 = h_{ik}\, dx^i dx^k. \tag{1.28}$$

3. Ceci résulte du fait que dans le référentiel d'accompagnement, $h_{\alpha\beta}$ possède toutes les propriétés du tenseur métrique fondamental $g_{\alpha\beta}$.

Par suite, l'intervalle quadridimensionnel exprimé en fonction des grandeurs physiquement observables, sera

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2. \tag{1.29}$$

Les principales propriétés physiquement observables qui sont attribuées au référentiel d'accompagnement ont été déduites par Zelmanov dans le cadre de sa théorie, en particulier — compte tenu des propriétés de non commutativité

$$\frac{{}^*\partial^2}{\partial x^i\,\partial t} - \frac{{}^*\partial^2}{\partial t\,\partial x^i} = \frac{1}{c^2}\,F_i\,\frac{{}^*\partial}{\partial t}\,, \tag{1.30}$$

$$\frac{{}^*\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^k} - \frac{{}^*\partial^2}{\partial x^k\,\partial x^i} = \frac{2}{c^2}\,A_{ik}\,\frac{{}^*\partial}{\partial t} \tag{1.31}$$

des opérateurs de dérivation chr.inv. tels qu'il les a introduit

$$\frac{{}^*\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial}{\partial t}\,, \qquad \frac{{}^*\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{g_{0i}}{g_{00}}\frac{\partial}{\partial x^0}\,. \tag{1.32}$$

En premier lieu, deux propriétés physiquement observables seront caractérisées par les grandeurs chr.inv. tridimensionnelles suivantes : le vecteur de la *force d'inertie gravitationnelle* F_i, et le *tenseur antisymétrique de la vitesse angulaire de rotation d'espace* A_{ik} qui sont donnés par

$$F_i = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial t}\right), \tag{1.33}$$

$$A_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k}\right) + \frac{1}{2\,c^2}\left(F_i v_k - F_k v_i\right). \tag{1.34}$$

Ici w et v_i caractérisent le corps de référence et son espace de référence. Ces derniers représentent respectivement le potentiel de gravitation

$$\mathrm{w} = c^2\,(1-\sqrt{g_{00}}\,)\,, \qquad 1-\frac{\mathrm{w}}{c^2} = \sqrt{g_{00}}\ , \tag{1.35}$$

et la vitesse linéaire de rotation d'espace

$$\left.\begin{aligned} v_i &= -\,c\,\frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\,, & v^i &= -\,c\,g^{0i}\sqrt{g_{00}} \\ v_i &= h_{ik}v^k, & v^2 &= v_k v^k = h_{ik}\,v^i v^k \end{aligned}\right\}. \tag{1.36}$$

On notera que w et v_i ne sont pas doués de la propriété d'invariance chronométrique, en dépit du fait que $v_i = h_{ik}v^k$ peut s'obtenir comme

pour les grandeurs chr.inv., en abaissant l'indice à l'aide du tenseur métrique chr.inv. h_{ik}.

Zelmanov montra ensuite que les grandeurs F_i et A_{ik} sont reliées par deux identités, les *Identités de Zelmanov* :

$$\frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial F_k}{\partial x^i} - \frac{{}^*\partial F_i}{\partial x^k}\right) = 0\,, \tag{1.37}$$

$$\frac{{}^*\partial A_{km}}{\partial x^i} + \frac{{}^*\partial A_{mi}}{\partial x^k} + \frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial x^m} + \frac{1}{2}\big(F_i A_{km} + F_k A_{mi} + F_m A_{ik}\big) = 0\,. \tag{1.38}$$

A l'approximation quasi-newtonienne, c'est-à-dire dans un champ gravitationnel faible pour des vitesses inférieures à la lumière, et en l'absence de rotation spatiale, F_i se réduit à une force gravitationnelle non relativiste $F_i = \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}$.

Zelmanov prouva également le théorème qui fixe les conditions d'holonomicité d'espace :

> THEOREME D'HOLONOMICITE D'ESPACE DE ZELMANOV :
> Lorsque le tenseur A_{ik} s'annule identiquement dans une région de l'espace quadridimensionnel (espace-temps), on a la condition nécessaire et suffisante pour que les sections spatiales soient partout orthogonales aux lignes de temps de cette région.

Autrement dit, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace soit holonome consiste à annuler le tenseur A_{ik}. Bien entendu, si les sections d'espace sont partout orthogonales aux lignes de temps (espace holonome), les grandeurs g_{0i} sont égales à zéro. Dans ce cas pour $g_{0i} = 0$, on aura $v_i = 0$, et $A_{ik} = 0$. C'est pourquoi nous appellerons A_{ik}, le *tenseur d'holonomicité d'espace*.

Si quelque part, les conditions $F_i = 0$ et $A_{ik} = 0$ sont satisfaites simultanément, alors elles entraînent les conditions $g_{00} = 1$ et $g_{0i} = 0$ (c'est-à-dire que les conditions $g_{00} = 1$ et $g_{0i} = 0$ peuvent être satisfaites par l'intermédiaire des transformations du temps dans la région considérée). D'après (1.21), on aura pour cette région $d\tau = dt$: la différence entre la coordonnée temporelle t et le temps physiquement observable τ disparaît en l'absence de champ gravitationnel et de rotation d'espace. En d'autres termes, selon la théorie des invariants chronométriques, cette différence provient à la fois de la gravitation et de la rotation de l'espace de référence de l'observateur (en fait son corps de référence, comme par exemple la terre si celui-ci y est rattaché), ou bien de l'un ou l'autre mouvement envisagé séparément.

Il est néanmoins douteux que puissent exister des régions de l'Univers dans lesquelles les champs gravitationnels et les rotations d'espace

soient strictement absents. On peut donc raisonnablement penser que la coordonnées temporelle et le temps physiquement observable sont en général différents. Par suite, l'espace réel de notre Univers est vraisemblablement non holonome renfermant en permanence un champ gravitationnel, et de ce fait, un espace dépourvu de gravitation ne peut être qu'une approximation locale.

La condition d'holonomicité d'un espace (espace-temps), est directement liée aux conditions d'intégrabilité du temps dans celui-ci. La formule de l'intervalle de temps observable (1.21) ne comporte pas de multiplicateur intégral. Autrement dit, cette formule ne peut se réduire à la forme

$$d\tau = A\,dt\,, \tag{1.39}$$

où le multiplicateur A ne dépend que de t et x^i : dans un espace non holonome le second terme de la formule (1.21) est non nul, dépendant de l'intervalle de coordonnée dx^i et de g_{0i}. Dans un espace holonome $A_{ik} = 0$, et donc $g_{0i} = 0$. Dans ce dernier cas, le second terme de (1.21) s'annule, ce qui implique alors que le premier terme est l'intervalle élémentaire de temps dt pourvu d'un multiplicateur intégral

$$A = \sqrt{g_{00}} = f\left(x^0, x^i\right), \tag{1.40}$$

et donc nous pouvons à présent écrire l'intégrale

$$d\tau = \int \sqrt{g_{00}}\,dt\,. \tag{1.41}$$

Il en résulte que le temps est intégrable dans un espace holonome ($A_{ik} = 0$) contrairement à l'espace non holonome ($A_{ik} \neq 0$). L'intégrabilité du temps dans un espace holonome permet de synchroniser les horloges distantes en deux points distincts de l'espace, en déplaçant une horloge de contrôle le long du chemin qui sépare ces deux points. Pour un espace non holonome, cette synchronisation est en principe impossible. Plus la distance de séparation est grande, et plus le décalage temporel entre les deux points est important.

L'espace de notre planète terre n'est pas holonome en raison de sa rotation journalière sur son axe. Par suite, deux horloges placées en différent points de la terre révèlent un décalage de leurs intervalles temporels respectifs. Le décalage de leur temps physiquement observable s'accroît avec leur distance de séparation. Cet effet a été précisément mesuré par les expériences bien connues de Hafele-Keating [9–12], dans lesquelles le déplacement d'horloges atomiques par avion autour du globe terrestre a mis en évidence une variation temporelle sensible due à la

rotation d'espace de la terre. Durant le vol suivant la rotation terrestre, l'espace de l'observateur à bord a subi plus de rotations que celui de l'observateur fixe à terre. Pour le même vol dirigé dans le sens contraire à la rotation terrestre, les résultats se sont trouvés inversés. L'horloge atomique embarquée a ainsi détecté des variations significatives du temps observé, dépendants de la vitesse de rotation d'espace.

Etant donné que la synchronisation des horloges en différents points de la surface terrestre reste un problème essentiel en navigation maritime et en aviation, on a été empiriquement conduit à désynchroniser les tables pour tenir compte de la rotation de la terre. Grâce à la théorie des invariants chronométriques, nous connaissons maintenant l'origine de ces corrections, et nous sommes en mesure de les prévoir sur la base de la relativité générale.

En dehors de la gravitation et de la rotation, le corps de référence peut se déformer, modifiant son réseau de coordonnées au cours du temps. Cet état de fait doit être également pris en considération lors des mesures. On peut alors introduire dans les équations le tenseur symétrique tridimensionnel chr.inv. représentant les *taux de déformation* de l'espace de référence

$$\left.\begin{aligned} &D_{ik} = \frac{1}{2}\frac{{}^{*}\partial h_{ik}}{\partial t}\,, \qquad D^{ik} = -\frac{1}{2}\frac{{}^{*}\partial h^{ik}}{\partial t} \\ &D = h^{ik} D_{ik} = D^{n}_{n} = \frac{{}^{*}\partial \ln\sqrt{h}}{\partial t}\,, \qquad h = \det\|\,h_{ik}\| \end{aligned}\right\}. \tag{1.42}$$

Zelmanov avait déjà déduit les formules pour les grandeurs quadridimensionnelles F_α, $A_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta}$ [13]

$$F_\alpha = -\,2\,c^2 b^\beta a_{\beta\alpha}\,, \tag{1.43}$$

$$A_{\alpha\beta} = c\,h^\mu_\alpha h^\nu_\beta\, a_{\mu\nu}\,, \tag{1.44}$$

$$D_{\alpha\beta} = c\,h^\mu_\alpha h^\nu_\beta\, d_{\mu\nu}\,, \tag{1.45}$$

qui sont la généralisation covariante des grandeurs chr.inv. F_i, A_{ik}, D_{ik}. Les quantités auxiliaires $a_{\alpha\beta}$, $d_{\alpha\beta}$ sont ici

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\big(\nabla_\alpha b_\beta - \nabla_\beta b_\alpha\big)\,, \quad d_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\big(\nabla_\alpha b_\beta + \nabla_\beta b_\alpha\big)\,. \tag{1.46}$$

Les symboles habituels de Christoffel de deuxième espèce $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ et ceux de première espèce $\Gamma_{\mu\nu,\sigma}$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = g^{\alpha\sigma}\,\Gamma_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2}\,g^{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right) \tag{1.47}$$

sont reliés à leurs homologues chr.inv.

$$\Delta^i_{jk} = h^{im}\Delta_{jk,m} = \frac{1}{2}\, h^{im}\left(\frac{{}^*\partial h_{jm}}{\partial x^k} + \frac{{}^*\partial h_{km}}{\partial x^j} - \frac{{}^*\partial h_{jk}}{\partial x^m}\right) \tag{1.48}$$

déterminés de façon identique aux $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$. La seule différence résidant dans la substitution du tenseur chr.inv. h_{ik} au tenseur métrique fondamental $g_{\alpha\beta}$. Les symboles de Christoffel usuels sont reliés aux caractéristiques chr.inv. du référentiel d'accompagnement par les relations

$$D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot} = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}\left(\Gamma^i_{0k} - \frac{g_{0k}\,\Gamma^i_{00}}{g_{00}}\right), \tag{1.49}$$

$$F^k = -\,\frac{c^2\,\Gamma^k_{00}}{g_{00}}\,, \tag{1.50}$$

$$g^{i\alpha}g^{k\beta}\,\Gamma^m_{\alpha\beta} = h^{iq}h^{ks}\Delta^m_{qs}\,. \tag{1.51}$$

Zelmanov avait également déduit les formules pour les projections chr.inv. du tenseur de Riemann-Christoffel. Tenant compte de la non commutativité des dérivées secondes d'un vecteur arbitraire de l'espace donné, il suivit la méthode identique appliquée à la détermination de ce tenseur de courbure

$${}^*\nabla_i{}^*\nabla_k\, Q_l - {}^*\nabla_k{}^*\nabla_i\, Q_l = \frac{2A_{ik}}{c^2}\frac{{}^*\partial Q_l}{\partial t} + H^{\cdot\cdot\cdot j}_{lki\cdot}Q_j\,, \tag{1.52}$$

et il obtint ainsi le tenseur chr.inv.

$$H^{\cdot\cdot\cdot j}_{lki\cdot} = \frac{{}^*\partial\Delta^j_{il}}{\partial x^k} - \frac{{}^*\partial\Delta^j_{kl}}{\partial x^i} + \Delta^m_{il}\Delta^j_{km} - \Delta^m_{kl}\Delta^j_{im}\,, \tag{1.53}$$

qui est comparable au tenseur de Schouten tiré de la théorie des variétés non honolomes [14]. Le tenseur $H^{\cdot\cdot\cdot j}_{lki\cdot}$ diffère algébriquement du tenseur de Riemann-Christoffel par la présence de la rotation d'espace A_{ik} dans la formule (1.52). Néanmoins, sa généralisation donne le tenseur chr.inv.

$$C_{lkij} = \frac{1}{4}\left(H_{lkij} - H_{jkil} + H_{klji} - H_{iljk}\right), \tag{1.54}$$

qui possède toutes les propriétés algébriques du tenseur de Riemann-Christoffel dans l'espace tridimensionnel. Zelmanov a donc appelé C_{iklj}, le *tenseur de courbure chr.inv.* qui est de fait le tenseur de courbure physiquement observable de la section spatiale de l'observateur. Par contractions successives

$$C_{kj} = C^{\cdot\cdot\cdot i}_{kij\cdot} = h^{im}C_{kimj}\,, \qquad C = C^j_j = h^{lj}C_{lj} \tag{1.55}$$

on trouve le scalaire chr.inv. C qui rend compte de la *courbure tridimensionnelle observable* de cet espace.

Substituant les composantes nécessaires du tenseur de Riemann-Christoffel dans les formules pour leurs projections chr.inv.

$$X^{ik} = -\,c^2\,\frac{R_{0\cdot 0\cdot}^{\cdot i\cdot k}}{g_{00}}\,, \quad Y^{ijk} = -\,c\,\frac{R_{0\cdots}^{\cdot ijk}}{\sqrt{g_{00}}}\,, \quad Z^{ijkl} = c^2 R^{ijkl}, \tag{1.56}$$

et en abaissant les indices, Zelmanov obtint les formules

$$X_{ij} = \frac{{}^*\partial D_{ij}}{\partial t} - \big(D_i^l + A_{i\cdot}^{\cdot l}\big)\big(D_{jl} + A_{jl}\big) + \frac{1}{2}\,\big({}^*\nabla_i F_j + {}^*\nabla_j F_i\big) - \frac{1}{c^2}\,F_i F_j\,, \tag{1.57}$$

$$Y_{ijk} = {}^*\nabla_i\big(D_{jk} + A_{jk}\big) - {}^*\nabla_j\big(D_{ik} + A_{ik}\big) + \frac{2}{c^2}A_{ij}F_k\,, \tag{1.58}$$

$$Z_{iklj} = D_{ik}D_{lj} - D_{il}D_{kj} + A_{ik}A_{lj} - A_{il}A_{kj} + 2A_{ij}A_{kl} - c^2 C_{iklj}\,, \tag{1.59}$$

où nous avons $Y_{(ijk)} = Y_{ijk} + Y_{jki} + Y_{kij} = 0$, comme pour le tenseur de Riemann-Christoffel. Contractant à nouveau successivement les projections spatiales observables Z_{iklj}, on a

$$Z_{il} = D_{ik}D_l^k - D_{il}D + A_{ik}A_{l\cdot}^{\cdot k} + 2A_{ik}A_{\cdot l}^{k\cdot} - c^2 C_{il}\,, \tag{1.60}$$

$$Z = h^{il}Z_{il} = D_{ik}D^{ik} - D^2 - A_{ik}A^{ik} - c^2 C\,. \tag{1.61}$$

Tels sont les éléments de base de l'appareil mathématique des grandeurs observables — les invariants chronométriques de Zelmanov [2–4].

A l'aide de ces définitions, on peut donc trouver la façon dont un objet géométrique de l'espace pseudo-riemannien apparaît pour un observateur qui y est situé. Par exemple, à partir d'une équation déduite en analyse tensorielle généralement covariante, on peut calculer ses projections chr.inv. sur la ligne de temps et la section spatiale de n'importe quel corps de référence et formuler ainsi les projections chr.inv. en fonction des propriétés physiquement observables de l'espace de référence. De cette façon, on parvient aux équations ne contenant que les grandeurs mesurables en pratique.

§1.3 Particules massives et particules sans masse

Selon les concepts physiques actuels [15], les particules massives sont caractérisées par le quadrivecteur d'impulsion P^α, tandis que les particules dépourvues de masse sont elles, caractérisées par le vecteur d'onde quadridimensionnel K^α, c'est-à-dire

$$P^\alpha = m_0\frac{dx^\alpha}{ds}\,, \qquad K^\alpha = \frac{\omega}{c}\frac{dx^\alpha}{d\sigma}\,, \tag{1.62}$$

où m_0 est la masse au repos de la particule massive, et ω est la fréquence associée à la particule sans masse. L'intervalle d'espace-temps ds est pris comme paramètre de dérivation pour les particules massives (trajectoires non isotropes $ds \neq 0$). Le long des trajectoires isotropes on a $ds = 0$ (particules sans masse), mais l'intervalle tridimensionnel observable est $d\sigma \neq 0$. Par suite, $d\sigma$ sera pris comme paramètre de dérivation pour les particules dépourvues de masse.

Le carré du vecteur d'impulsion P^α le long des trajectoires de particules massives est non nul et constant

$$P_\alpha P^\alpha = g_{\alpha\beta}\, P^\alpha P^\beta = m_0^2 = const \neq 0\,, \tag{1.63}$$

c'est-à-dire que P^α est un vecteur non isotrope. Le carré du vecteur d'onde quadridimensionnel K^α est nul le long des trajectoires des particules sans masse

$$K_\alpha K^\alpha = g_{\alpha\beta}\, K^\alpha K^\beta = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta}{d\sigma^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{ds^2}{d\sigma^2} = 0\,. \tag{1.64}$$

Puisque ds^2 sous la forme chr.inv. (1.29) s'exprime par l'intermédiaire du carré de la racine relativiste,

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 = c^2 d\tau^2 \left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right), \quad \mathrm{v}^2 = h_{ik}\, \mathrm{v}^i \mathrm{v}^k, \tag{1.65}$$

on peut écrire pour P^α et K^α

$$P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{m}{c}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\,, \qquad K^\alpha = \frac{\omega}{c}\frac{dx^\alpha}{d\sigma} = \frac{k}{c}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\,, \tag{1.66}$$

où $k = \frac{\omega}{c}$ est le nombre d'onde et m la masse relativiste. A partir des formules déduites, on peut voir que le temps physiquement observable τ est utilisable en tant que paramètre de dérivation universel pour les trajectoires à la fois isotropes et non isotropes, c'est-à-dire que c'est un paramètre unique pour les particules avec et sans masse.

Le calcul des composantes contravariantes de P^α et K^α donne

$$P^0 = m\frac{dt}{d\tau}\,, \qquad P^i = \frac{m}{c}\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{1}{c}\, m\mathrm{v}^i\,, \tag{1.67}$$

$$K^0 = k\frac{dt}{d\tau}\,, \qquad K^i = \frac{k}{c}\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{1}{c}\, k\mathrm{v}^i\,, \tag{1.68}$$

où $m\mathrm{v}^i$ est le vecteur tridimensionnel chr.inv. d'impulsion d'une particule massive, tandis que $k\mathrm{v}^i$ est le vecteur d'onde tridimensionnel

chr.inv.attribué à la particule sans masse. La vitesse observable chr.inv. des particules sans masse est égale à la vitesse observable chr.inv. de la lumière $\mathrm{v}^i = c^i$ (1.23).

La formule pour $\frac{dt}{d\tau}$ peut être obtenue à partir du carré du vecteur de la quadrivitesse d'une particule U^α, laquelle est respectivement soit subliminique, luminique ou supraluminique

$$g_{\alpha\beta}\, U^\alpha U^\beta = +1\,, \qquad U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}\,, \qquad ds = c\,d\tau\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}\,, \quad (1.69)$$

$$g_{\alpha\beta}\, U^\alpha U^\beta = 0\,, \qquad U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\sigma}\,, \qquad ds = 0\,, \quad d\sigma = c\,d\tau\,, \quad (1.70)$$

$$g_{\alpha\beta}\, U^\alpha U^\beta = -1\,, \qquad U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{|ds|}\,, \qquad ds = c\,d\tau\sqrt{\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}-1}\,. \quad (1.71)$$

Substituant alors les définitions du §1.2 pour h_{ik}, v_i, v^i dans chaque formule pour les $g_{\alpha\beta}\, U^\alpha U^\beta$, on aboutit à trois équations quadratiques par rapport à $\frac{dt}{d\tau}$. Elles sont les mêmes pour les vitesses subluminiques, luminiques, et supraluminiques

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{2v_i\mathrm{v}^i}{c^2\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)}\frac{dt}{d\tau} + \frac{1}{\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2}\left(\frac{1}{c^4}\,v_i v_k \mathrm{v}^i\mathrm{v}^k - 1\right) = 0\,. \quad (1.72)$$

Cette équation quadratique a deux solutions

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_{1,2} = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\left(\frac{1}{c^2}\,v_i\mathrm{v}^i \pm 1\right). \quad (1.73)$$

La fonction $\frac{dt}{d\tau}$ nous permet de reconnaître l'orientation temporelle prise par la particule. Si $\frac{dt}{d\tau} > 0$, le paramètre de la coordonnée temporelle t, s'accroît, c'est-à-dire que la particule se déplace du passé vers le futur (écoulement du temps direct). Si $\frac{dt}{d\tau} < 0$, le paramètre de la coordonnée temporelle décroît, c'est-à-dire que la particule retourne du futur dans le passé (écoulement du temps inverse).

Remarquons que la quantité $1-\frac{\mathrm{w}}{c^2} = \sqrt{g_{00}} > 0$, car les deux autres cas $\sqrt{g_{00}} = 0$, $\sqrt{g_{00}} < 0$ sont en contradiction avec le choix de la signature $(+---)$.

Par suite, la coordonnée temporelle t se fige, $\frac{dt}{d\tau} = 0$, à condition que

$$v_i\mathrm{v}^i = -\,c^2, \qquad v_i\mathrm{v}^i = +\,c^2. \quad (1.74)$$

La coordonnée temporelle est à écoulement du temps direct $\frac{dt}{d\tau} > 0$,

si dans la première et la seconde solution, on a respectivement

$$\frac{1}{c^2}\, v_i \mathrm{v}^i + 1 > 0\,, \qquad \frac{1}{c^2}\, v_i \mathrm{v}^i - 1 > 0\,. \tag{1.75}$$

La coordonnée temporelle est à écoulement du temps inverse $\frac{dt}{d\tau} < 0$ pour

$$\frac{1}{c^2}\, v_i \mathrm{v}^i + 1 < 0\,, \qquad \frac{1}{c^2}\, v_i \mathrm{v}^i - 1 < 0\,. \tag{1.76}$$

Pour les particules subluminiques, $v_i \mathrm{v}^i < c^2$ est toujours vrai. Il en résulte que l'écoulement direct du temps pour des particules massives observables répond à la première condition compte tenu de (1.75), tandis que l'inversion de l'écoulement du temps répond à la seconde condition en prenant en compte (1.76).

Notons que nous avons envisagé le problème de la direction de la coordonnée temporelle en supposant que le temps physiquement observable est $d\tau > 0$, toujours en raison du fait que n'importe quel observateur perçoit les évènement dans le sens passé-futur.

Utilisant alors les formules (1.67), (1.68), (1.73), calculons les composantes covariantes P_i et K_i — c'est-à-dire les projections des quadrivecteurs P^α et K^α sur la ligne de temps. On obtient

$$P_i = -\frac{m}{c}\,(\mathrm{v}_i \pm v_i)\,, \qquad K_i = -\frac{k}{c}\,(\mathrm{v}_i \pm v_i)\,, \tag{1.77}$$

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm m\,, \qquad \frac{K_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm k\,, \tag{1.78}$$

où les projections temporelles $+m$ et $+k$ se manifestent au cours de l'observation de ces particules se déplaçant vers le futur (écoulement du temps direct), tandis que $-m$ et $-k$ caractérisent les particules provenant du futur vers le passé (écoulement du temps indirect).

En définitive, on peut définir les grandeurs physiquement observables comme suit. Pour une particule massive,ce sont : sa masse relativiste $\pm m$ et la grandeur tridimensionnelle $\frac{1}{c} m\mathrm{v}^i$, où $m\mathrm{v}^i$ est le vecteur d'impulsion observable de la particule. Pour une particule sans masse, ce sera le nombre d'onde qui lui est associé $\pm k$ et la quantité tridimensionnelle $\frac{1}{c} k\mathrm{v}^i$, où $k\mathrm{v}^i$ est le vecteur représentant le nombre d'onde observable de la particule.

A partir des formules (1.77) et (1.78), on peut voir que le vecteur du nombre d'onde $k\mathrm{v}^i$ observable caractérisant les particules sans masse, est l'analogue du vecteur impulsion observable des particules massives.

Substituant les formules obtenues pour P^0, P^i, K^0, K^i ainsi que

celles pour les g_{ik} exprimées par $h_{ik} = -g_{ik} + \frac{1}{c^2} v_i v_k$, dans les formules pour $P_\alpha P^\alpha$ (1.63) et $K_\alpha K^\alpha$ (1.64), on parvient aux relations entre l'énergie physiquement observable d'une particule massive et son impulsion observable

$$\frac{E^2}{c^2} - m^2 \mathrm{v}_i \mathrm{v}^i = \frac{E_0^2}{c^2}\,, \tag{1.79}$$

et pour la particule sans masse

$$h_{ik} \mathrm{v}^i \mathrm{v}^k = c^2, \tag{1.80}$$

où $E = \pm mc^2$ est l'énergie relativiste de la particule massive, alors que $E_0 = m_0 c^2$ est son énergie au repos.

En comparant les nouvelles formules obtenues pour P^α et K^α (1.66), on aboutit à définir un paramètre de dérivation universel, le temps physiquement observable τ, qui s'applique à la fois aux particules avec masse et sans masse. Ceci, en dépit de la *différence* entre les quadrivecteurs dynamiques P^α et K^α attachés à chaque type de ces particules.

Proposons nous maintenant de trouver un vecteur dynamique universel qui peut dans des cas particuliers, se réduire en deux vecteurs dynamiques, P^α pour les particules massives, et K^α pour les particules sans masse.

Nous aborderons ce problème en supposant que le dualisme onde-particule introduit à l'origine par Louis de Broglie, s'applique à tous les types de particules sans exception. Dans cette perspective, nous envisagerons le mouvement des particules massives et sans masse sous l'aspect de la propagation d'ondes à l'approximation de *l'optique géométrique*.

A cet approximation, le quadrivecteur d'onde K^α pour une particule dépourvue de masse s'écrit [15]

$$K_\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}\,, \tag{1.81}$$

où ψ est la phase de l'onde (connue également sous le nom *d'Eikonale*) [15] Suivant le même schéma, nous poserons pour le quadrivecteur d'impulsion P_α d'une particule massive

$$P_\alpha = \frac{\hbar}{c} \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}\,, \tag{1.82}$$

où $\hbar$ est la constante de Planck, tandis que le coefficient $\frac{\hbar}{c}$ égale les dimensions des deux parties de l'équation. A partir de ces formules on parvient à

$$\frac{K_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{c} \frac{{}^*\partial \psi}{\partial t}\,, \qquad \frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{\hbar}{c^2} \frac{{}^*\partial \psi}{\partial t}\,. \tag{1.83}$$

En égalant les deux quantités (1.83) et (1.78), on obtient

$$\pm\omega = \frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\,, \qquad \pm m = \frac{\hbar}{c^2}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\,. \tag{1.84}$$

On voit alors que la valeur $+\omega$ pour une particule sans masse et $+m$ pour une particule massive intervient pour une phase ψ qui s'accroît avec le temps, tandis que $-\omega$ et $-m$ caractérisent une phase décroissante avec le temps. A partir de ces équations, on parvient à une formule pour l'énergie des deux types de particules, basée sur la nature de la dualité onde-particule. Il vient ainsi

$$\pm mc^2 = \pm\,\hbar\omega = \hbar\,\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t} = E\,. \tag{1.85}$$

Selon (1.82), on obtient la relation de dépendance entre l'impulsion chr.inv. p^i d'une particule et la phase de son onde ψ

$$p^i = m\mathrm{v}^i = -\,\hbar\,h^{ik}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k}\,, \qquad p_i = m\mathrm{v}_i = -\,\hbar\,\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i}\,. \tag{1.86}$$

De plus, on sait [15] que la condition $K_\alpha K^\alpha = 0$ peut se traduire par

$$g^{\alpha\beta}\,\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x^\beta} = 0\,, \tag{1.87}$$

qui représente l'équation de base de l'optique géométrique ou *équation d'Eikonale*.

Formulant les opérateurs de dérivation classique au moyen des opérateurs différentiels chr.inv. $\frac{{}^*\partial}{\partial t}$ et $\frac{{}^*\partial}{\partial x^i}$ et compte tenu de

$$g^{00} = \frac{1-\frac{1}{c^2}v_i v^i}{g_{00}}\,, \qquad g^{ik} = -\,h^{ik}, \qquad v^i = -\,c\,g^{0i}\sqrt{g_{00}}\,, \tag{1.88}$$

on parvient à l'équation d'Eikonale chr.inv. pour les particules sans masse

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - h^{ik}\,\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k} = 0\,. \tag{1.89}$$

De la même façon, on obtient l'équation d'Eikonale chr.inv. pour les particules massives

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - h^{ik}\,\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k} = \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\,, \tag{1.90}$$

qui, pour $m_0 = 0$, se réduit bien à la précédente.

Substituant la masse relativiste m (1.84) dans (1.66), on obtient le vecteur dynamique P^α qui caractérise le mouvement des particules avec et sans masse à l'approximation de l'optique géométrique

$$P^\alpha = \frac{\hbar\omega}{c^3}\frac{dx^\alpha}{\partial\tau}\,, \qquad P_\alpha P^\alpha = \frac{\hbar^2\omega^2}{c^4}\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right). \tag{1.91}$$

La longueur d'un vecteur est une grandeur réelle pour $\mathrm{v}<c$, nulle pour $\mathrm{v}=c$, et imaginaire pour $\mathrm{v}>c$. Par suite, le vecteur dynamique P^α va caractériser les particules pour n'importe quelle masse au repos (réelle, nulle ou imaginaire)

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm\frac{\hbar\omega}{c^2}\,, \qquad P^i = \frac{\hbar\omega}{c^3}\,\mathrm{v}^i, \tag{1.92}$$

où la projection du temps observable a la dimension d'une masse, et la grandeur $p^i = cP^i$ celle d'une impulsion.

§1.4 Espace-temps complètement dégénéré. Zéro-particules

On sait que le long des trajectoires des particules sans masse (trajectoires isotropes), l'intervalle quadridimensionnel est nul

$$ds^2 = c^2d\tau^2 - d\sigma^2 = 0\,, \qquad c^2d\tau^2 = d\sigma^2 \neq 0\,. \tag{1.93}$$

Cependant le cas $ds^2=0$ est vrai non seulement pour $c^2d\tau^2=d\sigma^2$, mais également pour la condition stricte $c^2d\tau^2=d\sigma^2=0$. La condition $d\tau^2=0$, signifie que le temps physiquement observable τ a la même valeur numérique tout au long de la trajectoire. La condition $d\sigma^2=0$ signifie elle, que toutes les trajectoires tridimensionnelles sont nulles. Compte tenu des définitions de $d\tau$ (1.21), et de $d\sigma^2$ (1.28), ainsi que du fait que dans n'importe quel référentiel d'accompagnement on a $h_{00}=h_{0i}=0$, il est possible d'exprimer les conditions $d\tau^2=0$, et $d\sigma^2=0$, sous forme développée

$$cd\tau = \left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_i u^i\right)\right]cdt = 0\,, \qquad dt\neq 0\,, \tag{1.94}$$

$$d\sigma^2 = h_{ik}\,dx^i dx^k = 0\,, \tag{1.95}$$

où $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ est la vitesse de coordonnées qui n'est pas une grandeur physiquement observable chr.inv.

Rappelons que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une métrique soit entièrement dégénérée est la nullité du déterminant du tenseur métrique. Pour la métrique physiquement observable tridimensionnelle

$d\sigma^2 = h_{ik}\, dx^i dx^k$, cette condition est

$$h = \det \| h_{ik} \| = 0\,. \tag{1.96}$$

D'autre part, le déterminant du tenseur métrique chr.inv. h_{ik} a la forme [2–4]

$$h = -\frac{g}{g_{00}}\,, \tag{1.97}$$

où $g = \det \| g_{\alpha\beta} \|$. Il en résulte que la dégénérescence de la forme tridimensionnelle $d\sigma^2$, c'est-à-dire $h = 0$, signifie la dégénérescence de la forme quadridimensionnelle ds^2, c'est-à-dire $g = 0$. Par conséquent, un espace quadridimensionnel (espace-temps) qui répond aux conditions (1.94) et (1.95), est un *espace-temps complètement dégénéré*.

Substituant $h_{ik} = -g_{ik} + \frac{1}{c^2} v_i v_k$ dans (1.95), et après avoir divisé par dt^2, on obtient (1.94) et (1.95) qui constituent les *conditions physiques de dégénérescence d'espace*, sous la forme finale

$$\mathrm{w} + v_i u^i = c^2, \qquad g_{ik}\, u^i u^k = c^2 \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2, \tag{1.98}$$

où $v_i u^i$ est le produit scalaire de la vitesse linéaire de rotation d'espace v_i, et de la vitesse de coordonnées u^i de la particule.

Si toutes les grandeurs satisfont $v_i = 0$, (c'est-à-dire que l'espace est holonome), alors $\mathrm{w} = c^2$ et $\sqrt{g_{00}} = 1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2} = 0$. Cette circonstance traduit le fait que le potentiel gravitationnel w du corps de référence est suffisamment intense au point donné de l'espace (distant du corps) pour provoquer un effondrement gravitationnel de l'espace en ce point. Ce cas de figure ne sera pas discuté ici.

Dans ce qui suit, nous porterons notre attention sur la dégénérescence du 4-espace (espace-temps) pour le cas d'un espace non holonome ($v_i \neq 0$), c'est-à-dire des sections spatiales à partir desquelles l'observateur subit des rotations.

Au moyen de la définition de $d\tau$ (1.21), on trouve la relation entre la vitesse de coordonnées u^i et la vitesse observable v^i

$$\mathrm{v}^i = \frac{u^i}{1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w} + v_k u^k\right)}\,. \tag{1.99}$$

On est alors en mesure d'exprimer ds^2 sous une forme qui décrit explicitement les conditions de dégénérescence

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right) = c^2 dt^2 \left\{ \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w} + v_k u^k\right)\right]^2 - \frac{u^2}{c^2} \right\}. \tag{1.100}$$

Manifestement, l'espace-temps dégénéré ne peut renfermer que des particules pour lesquelles les conditions physiques de dégénérescence (1.98) sont satisfaites.

Un tel espace-temps complètement dégénéré sera ici appelé *zéro-espace*, et les particules qui y sont admises, seront elles, appelées *zéro-particules*.

§1.5 Un espace étendu pour les particules des trois types

Le mouvement des particules avec et sans masse, avait été considéré dans un espace-temps quadridimensionnel dont le déterminant est strictement non-dégénéré ($g < 0$). Nous allons maintenant envisager ce mouvement dans un espace-temps où la métrique dégénérée est permise ($g \leqslant 0$).

Au paragraphe précédent, nous avions déjà obtenu la métrique d'un tel espace-temps étendu (voir formule 1.100). Par suite, dans cet espace-temps ($g \leqslant 0$), le vecteur impulsion P^α d'une particule massive prend la forme

$$P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{M}{c} \frac{dx^\alpha}{dt} , \tag{1.101}$$

$$M = \frac{m_0}{\sqrt{\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w} + v_k u^k\right)\right]^2 - \frac{u^2}{c^2}}} , \tag{1.102}$$

où M représente la *masse rotationnelle de gravitation* de la particule. Cette masse ne dépend pas seulement de la vitesse tridimensionnelle de la particule par rapport à l'observateur, mais aussi du potentiel gravitationnel w (le champ du corps de référence), ainsi que de la vitesse linéaire v_i de rotation d'espace.

A partir de la formule (1.101), on voit que dans un espace-temps quadridimensionnel où la métrique dégénérée est admise, $g \leqslant 0$, le paramètre de dérivation généralisé est la coordonnée de temps t.

Substituant v^2 de (1.99), et $m_0 = m\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}$, dans cette formule, on parvient à la relation entre la masse relativiste m et la masse rotationnelle de gravitation M

$$M = \frac{m}{1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w} + v_i u^i\right)} . \tag{1.103}$$

De la formule déduite, on voit que si M se présente sous la forme d'un rapport entre deux grandeurs dont chacune est égale à zéro pour une métrique dégénérée ($g = 0$), ce rapport n'est pas nul $M \neq 0$.

Cette circonstance ne doit pas constituer une surprise. Elle est identique pour la masse relativiste m quand $\mathrm{v}^2 = c^2$. En effet, lorsque $m_0 = 0$

et $\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}=0$, le rapport de ces quantités est toujours $m\neq 0$.

Par conséquent, les particules du genre lumière (particules sans masse), constituent le cas limite des particules massives pour $\mathrm{v}\to c$. Les zéro-particules qui peuvent être considérées comme un cas limite de celles du genre lumière, se déplacent dans un espace non holonome à la vitesse observable v^i (1.99), et dépendent du potentiel de gravitation w associé au corps de référence ainsi que de l'orientation par rapport à la vitesse linéaire de rotation d'espace.

La composante temporelle du vecteur d'Univers P^α (1.101) et sa projection physiquement observable sur la ligne de temps sont

$$P^0 = M = \frac{m}{1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_i u^i\right)}\,, \tag{1.104}$$

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = M\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_i u^i\right)\right] = m\,, \tag{1.105}$$

tandis que les composantes spatiales sont

$$P^i = \frac{M}{c}\,u^i = \frac{m}{c}\,\mathrm{v}^i, \tag{1.106}$$

$$P_i = -\frac{M}{c}\left[u_i + v_i - \frac{1}{c^2}\,v_i\left(\mathrm{w}+v_k u^k\right)\right]. \tag{1.107}$$

Dans une région de l'espace-temps étendu complètement dégénéré, c'est-à-dire sous les conditions physiques de dégénérescence (1.98), ces composantes deviennent

$$P^0 = M \neq 0\,, \qquad \frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = m = 0\,, \tag{1.108}$$

$$P^i = \frac{M}{c}\,u^i, \qquad P_i = -\frac{M}{c}\,u_i\,, \tag{1.109}$$

c'est-à-dire que les particules de l'espace-temps dégénéré (zéro-particules) n'ont pas de masse relativiste mais leurs masses rotationnelles de gravitation elles, ne sont pas nulles.

Nous allons maintenant nous intéresser aux particules massives de l'espace-temps étendu, dans le cadre du dualisme onde-particule. Dans ce cas, les composantes du vecteur dynamique universel $P_\alpha = \frac{\hbar}{c}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^\alpha}$ (1.82) sont

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = m = M\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_i u^i\right)\right] = \frac{\hbar}{c^2}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\,, \tag{1.110}$$

$$P_i = \frac{\hbar}{c}\left(\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2}\, v_i\, \frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\right), \tag{1.111}$$

$$P^i = \frac{m}{c}\, \mathrm{v}^i = \frac{M}{c}\, u^i = -\,\frac{\hbar}{c}\, h^{ik}\, \frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k}\,, \tag{1.112}$$

$$P^0 = M = \frac{\hbar}{c^2\big(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\big)}\left(\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t} - v^i\, \frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i}\right). \tag{1.113}$$

A l'aide de ces composantes on obtient les deux formules suivantes

$$Mc^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{c^2}\,(\mathrm{w} + v_i u^i)}\, \hbar\, \frac{{}^*\partial\psi}{\partial t} = \hbar\,\Omega = E_{\mathrm{tot}}\,, \tag{1.114}$$

$$Mu^i = -\,\hbar\, h^{ik}\, \frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k}\,, \tag{1.115}$$

où Ω est la fréquence de rotation gravitationnelle, tandis que ω est la fréquence classique

$$\Omega = \frac{\omega}{1 - \frac{1}{c^2}\,(\mathrm{w} + v_i u^i)}\,, \qquad \omega = \frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\,. \tag{1.116}$$

La première relation (1.114) relie la masse rotationnelle de gravitation M à son énergie totale correspondante E_{tot}. La seconde relation (1.115) relie l'impulsion tridimensionnelle généralisée Mu^i au gradient de la phase de l'onde ψ.

A l'approximation de l'optique géométrique (Eikonale), la condition $P_\alpha P^\alpha = const$ prend la forme (1.90). Dans l'espace-temps étendu, la forme corpusculaire de cette condition est l'équation chr.inv.

$$\frac{E^2}{c^2} - M^2 u^2 = \frac{E_0^2}{c^2}\,, \tag{1.117}$$

où M^2u^2 est le carré du vecteur impulsion tridimensionnel généralisé, $E = mc^2$, $E_0 = m_0 c^2$. Au moyen de cette formule, on obtient les expressions du vecteur dynamique universel

$$P^\alpha = \frac{\hbar\,\Omega}{c^3}\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{\hbar\,\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}}{c^3\left[1 - \frac{1}{c^2}\,(\mathrm{w} + v_i u^i)\right]}\,\frac{dx^\alpha}{\partial t}\,, \tag{1.118}$$

$$P_\alpha P^\alpha = \frac{\hbar^2\Omega^2}{c^4}\left\{\left[1 - \frac{1}{c^2}\,\big(\mathrm{w} + v_i u^i\big)\right]^2 - \frac{u^2}{c^2}\right\}, \tag{1.119}$$

dans lesquelles sont comprises les conditions de dégénérescence.

Dans une région dégénérée de l'espace-temps étendu, nous avons $m_0 = 0$, $m = 0$, $\omega = \frac{{}^*\partial\psi}{\partial t} = 0$, et $P_\alpha P^\alpha = 0$. Il s'ensuit que par rapport à un observateur situé dans notre Univers, les particules d'une région dégénérée (zéro-particules) sont dépourvues de masse au repos $m_0 = 0$, et de masse relativiste $m = 0$, avec une fréquence relativiste ω nulle (ce qui correspond à la masse relativiste dans le cadre onde-particule), tandis que la longueur du quadrivecteur dynamique d'une zéro-particule est conservée. De plus, pour les zéro-particules, la masse rotationnelle de gravitation M (1.102), le vecteur tridimensionnel d'impulsion généralisé Mu^i (1.115), et la fréquence de rotation gravitationnelle Ω (1.116) qui correspond à la masse M en accord avec le dualisme onde-particule, ne s'annulent pas.

Par rapport à un observateur situé dans le zéro-espace, la métrique $d\mu^2$ de ce dernier n'est pas invariante. Il est facile de le montrer en partant de la seconde condition de dégénérescence $d\sigma^2 = h_{ik}\, dx^i dx^k = 0$. Substituant ici $h_{ik} = -g_{ik} + \frac{1}{c^2} v_i v_k$, divisant par dt^2, puis substituant à nouveau la première condition de dégénérescence $\mathrm{w} + v_i u^i = c^2$, on parvient à la métrique intérieure du zéro-espace

$$d\mu^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 \neq inv\,, \tag{1.120}$$

qui n'est manifestement plus invariante. Il en découle que par rapport à un observateur situé dans le zéro-espace, aucune longueur de quadrivecteur associé à toute zéro-particule, ne se conserve le long de sa trajectoire

$$U_\alpha U^\alpha = g_{ik}\, u^i u^k = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 \neq const. \tag{1.121}$$

L'équation d'Eikonale pour les zéro particules peut être obtenue en substituant les conditions $m = 0$, $\omega = \frac{{}^*\partial\psi}{\partial t} = 0$, $P_\alpha P^\alpha = 0$, dans l'équation d'Eikonale (1.89) ou (1.90) déduites pour les particules respectivement avec et sans masse. Par suite, l'équation d'Eikonale pour les zéro-particules exprimée dans le système de référence d'un observateur classique situé dans notre Univers, s'écrit

$$h^{ik}\, \frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i} \frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k} = 0\,, \tag{1.122}$$

qui est une équation d'onde stationnaire. De notre point de vue, les zéro-particules nous apparaissent ainsi comme des *ondes stationnaires du genre lumière* — les ondes associées à une *lumière figée* (p.ex. *représentation circulaire*).

En définitive, l'étude de l'espace-temps étendu qui admet une métrique dégénérée complète nous amène à conclure qu'il y pré-existe deux barrières ultimes d'espace-temps :

1) Une *barrière luminique* surmontable par une particule excédant la vitesse de la lumière ;
2) Une *zéro-transition* pour laquelle une particule se trouve dans un état de rotation spécifique, dépendant d'une distribution particulière de matière (conditions de dégénérescence).

§1.6 Equations du mouvement : considérations générales

Nous nous proposons ici d'obtenir les équations du mouvement des particules avec et sans masse, et celles du genre lumière dans l'espace-temps étendu ($g \leqslant 0$), sous une forme commune à ces trois types de particules.

Du point de vue géométrique, les équations en question sont celles déduites par transport parallèle au sens de Levi-Civita appliqué au vecteur dynamique P^α

$$\mathrm{D}P^\alpha = dP^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} P^\mu dx^\nu = 0\,. \tag{1.123}$$

Les équations du transport parallèle (1.123) sont écrites sous forme généralement covariante. Afin de pouvoir les exploiter en pratique, ces dernières ne doivent contenir que des grandeurs chr.inv. (physiquement observables). Pour amener ces équations à la forme souhaitée, nous les projetons sur la ligne de temps et la section spatiale d'un référentiel qui accompagne nos références physiques. On obtient ainsi

$$\left.\begin{aligned} b_\alpha \mathrm{D}P^\alpha &= \sqrt{g_{00}}\left(dP^0 + \Gamma^0_{\mu\nu} P^\mu dx^\nu\right) + \\ &\qquad + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\left(dP^i + \Gamma^i_{\mu\nu} P^\mu dx^\nu\right) = 0 \\ h^i_\beta \mathrm{D}P^\beta &= dP^i + \Gamma^i_{\mu\nu} P^\mu dx^\nu = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{1.124}$$

Toutefois, les symboles de Christoffel qui apparaissent dans ces équations chr.inv. (1.124), ne sont pas encore exprimés en termes de quantités chr.inv. Les symboles de deuxième et première espèce, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ et $\Gamma_{\mu\nu,\sigma}$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = g^{\alpha\sigma}\Gamma_{\mu\nu,\sigma}\,, \quad \Gamma_{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right) \tag{1.125}$$

doivent être écrits en fonction des propriétés chr.inv. du référentiel d'accompagnement. Exprimant les composantes $g^{\alpha\beta}$ et les dérivées premiè-

res des $g_{\alpha\beta}$ au moyen de F_i, A_{ik}, D_{ik}, w, et v_i, on trouve après calculs

$$\Gamma_{00,0} = -\frac{1}{c^3}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\,, \tag{1.126}$$

$$\Gamma_{00,i} = \frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 F_i + \frac{1}{c^4}\,v_i\,\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}\,, \tag{1.127}$$

$$\Gamma_{0i,0} = -\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}\,, \tag{1.128}$$

$$\Gamma_{0i,j} = -\frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(D_{ij}+A_{ij}+\frac{1}{c^2}\,F_j v_i\right)+\frac{1}{c^3}\,v_j\,\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}\,, \tag{1.129}$$

$$\Gamma_{ij,0} = \frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left[D_{ij}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)+\frac{1}{2\,c^2}\big(F_i v_j+F_j v_i\big)\right], \tag{1.130}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij,k} = -\,\Delta_{ij,k} + \frac{1}{c^2}\Bigg[\,v_i A_{jk} + v_j A_{ik} + \frac{1}{2}\,v_k\left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i}+\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right) - \\ -\,\frac{1}{2\,c^2}\,v_k\big(F_i v_j + F_j v_i\big)\Bigg] + \frac{1}{c^4}\,F_k v_i v_j\,,\end{aligned} \tag{1.131}$$

$$\Gamma^0_{00} = -\frac{1}{c^3}\left[\frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial t}+\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)v_k F^k\right], \tag{1.132}$$

$$\Gamma^k_{00} = -\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 F^k, \tag{1.133}$$

$$\Gamma^0_{0i} = \frac{1}{c^2}\left[-\frac{1}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i}+v_k\left(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}+\frac{1}{c^2}\,v_i F^k\right)\right], \tag{1.134}$$

$$\Gamma^k_{0i} = \frac{1}{c}\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)\left(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}+\frac{1}{c^2}\,v_i F^k\right), \tag{1.135}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{ij} = -\frac{1}{c\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)}\Bigg\{-D_{ij}+\frac{1}{c^2}\,v_n\,\times \\ \times\left[v_j\left(D^n_i + A_{i\cdot}^{\cdot n}\right)+v_i\left(D^n_j + A_{j\cdot}^{\cdot n}\right)+\frac{1}{c^2}\,v_i v_j F^n\right]+ \\ +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j}+\frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right)-\frac{1}{2\,c^2}\big(F_i v_j + F_j v_i\big)-\Delta^n_{ij}\,v_n\Bigg\},\end{aligned} \tag{1.136}$$

$$\Gamma^k_{ij} = \Delta^k_{ij}-\frac{1}{c^2}\left[v_i\left(D^k_j + A_{j\cdot}^{\cdot k}\right)+v_j\left(D^k_i + A_{i\cdot}^{\cdot k}\right)+\frac{1}{c^2}\,v_i v_j F^k\right]. \tag{1.137}$$

Ici les Δ^i_{jk} représentent les symboles de Christoffel chr.inv. (1.48) qui sont déterminés de la même façon que les $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ en remplaçant les $g_{\alpha\beta}$ par les h_{ik}.

Maintenant en possession des opérateurs classiques exprimés au moyen des opérateurs différentiels chr.inv., et après avoir écrit $dx^0 = c\,dt$ en fonction de $d\tau$ (1.21), on obtient une formule chr.inv. pour la différentielle standard

$$d = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\,dx^\alpha = \frac{{}^*\partial}{\partial t}\,d\tau + \frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\,dx^i. \tag{1.138}$$

Notant les projections chr.inv. de P^α

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \varphi\,, \qquad P^i = q^i, \tag{1.139}$$

telles que $P_0 = \varphi\sqrt{g_{00}}$ et $P^i = q^i$, on trouve les composantes au repos

$$P^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\left(\varphi + \frac{1}{c}\,v_k q^k\right), \qquad P_i = -\,\frac{\varphi}{c}\,v_i - q_i\,. \tag{1.140}$$

A l'aide des formules substituées dans (1.124), on parvient aux équations chr.inv. du vecteur P^α parallèlement transporté qui sont

$$\left.\begin{aligned} &d\varphi + \frac{1}{c}\left(-F_i q^i d\tau + D_{ik}\,q^i dx^k\right) = 0 \\ &dq^i + \left(\frac{\varphi}{c}\,dx^k + q^k d\tau\right)\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right) - \frac{\varphi}{c}\,F^i d\tau + \Delta^i_{mk}\,q^m dx^k = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{1.141}$$

A partir de ces équations, il est maintenant facile d'opérer la transition vers les équations dynamiques recherchées, avec φ et q^i pour les différentes sortes de particules substituées dans (1.141) et divisées par dt.

§1.7 Equations du mouvement dans un espace étendu

Le vecteur dynamique universel P^α sous forme corpusculaire et ondulatoire, a déjà été déduit au §1.5 pour ce cas précis.

§1.7.1 Equations du mouvement des particules massives réelles

A partir de (1.105) et (1.106), et compte tenu de la forme corpusculaire pour le cas des particules massives, on calcule les projections chr.inv. de P^α

$$\varphi = M\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w} + v_k u^k\right)\right], \qquad q^i = M\,\frac{u^i}{c}\,, \tag{1.142}$$

où $\dfrac{u^2}{\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_i u^i\right)\right]^2} < c^2$, $d\tau \neq 0$, $dt \neq 0$.

On arrive ainsi directement à la forme corpusculaire des équations dynamiques du mouvement pour les particules massives

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{M\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_k u^k\right)\right]\right\}- \\
&\qquad -\frac{M}{c^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_k u^k\right)\right]F_i u^i+\frac{M}{c^2}D_{ik}u^i u^k=0 \\
&\frac{d}{dt}\left(Mu^i\right)+2M\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_k u^k\right)\right]\left(D^i_n+A^{\cdot i}_{n\cdot}\right)u^n- \\
&\qquad -M\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_k u^k\right)\right]F^i+M\Delta^i_{nk}u^n u^k=0
\end{aligned}\right\}, \quad (1.143)$$

où $d=\frac{{}^*\partial}{\partial t}\,d\tau+\frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\,dx^i$, $\frac{d}{d\tau}=\frac{{}^*\partial}{\partial t}+\mathrm{v}^i\,\frac{{}^*\partial}{\partial x^i}$, et aussi

$$\frac{d}{dt}=\frac{{}^*\partial}{\partial t}\frac{d\tau}{dt}+u^i\frac{{}^*\partial}{\partial x^i}=\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_m u^m\right)\right]\frac{{}^*\partial}{\partial t}+u^i\frac{{}^*\partial}{\partial x^i}\,. \quad (1.144)$$

Dans le cas des particules massives, on obtient pour la forme ondulatoire du vecteur dynamique universel P^α, d'après (1.110) et (1.112),

$$\varphi=\frac{\hbar}{c^2}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\,, \qquad q^i=-\frac{\hbar}{c}\,h^{ik}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k}\,, \quad (1.145)$$

où la variation temporelle physiquement observable de la phase ψ, c'est-à-dire que la dérivée chr.inv. $\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}$, est positive pour les particules se déplaçant du passé vers le futur, négative pour le déplacement inverse. On parvient ainsi à la forme ondulatoire de (1.143) c'est-à-dire aux équations de propagation dynamiques des ondes qui correspondent aux particules massives réelles en accord avec le dualisme onde-particule

$$\left.\begin{aligned}
&\pm\frac{d}{d\tau}\left(\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\right)+\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_p u^p\right)\right]F^i\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i}-D^i_k u^k\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i}=0 \\
&\frac{d}{d\tau}\left(h^{ik}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k}\right)\pm\frac{1}{c^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_p u^p\right)\right]\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}F^i- \\
&\qquad -\left\{\pm\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}u^k-h^{km}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_p u^p\right)\right]\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^m}\right\}\times \\
&\qquad\qquad \times\left(D^i_k+A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)+h^{mn}\Delta^i_{mk}u^k\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^n}=0
\end{aligned}\right\}. \quad (1.146)$$

Ainsi qu'il est facile de voir, le premier terme dans l'équation temporelle chr.inv. et les deux derniers termes des équations spatiales de (1.146) sont tous positifs pour les particules ondulatoires se déplaçant du passé vers le futur, ou tous négatifs dans le cas du mouvement inverse.

§1.7.2 Equations du mouvement des particules massives imaginaires

Ici, les termes φ et q^i de la forme corpusculaire de P^α ne vont différer de ceux des particules massives (1.142), que par la présence du multiplicateur $i=\sqrt{-1}$

$$\varphi = iM\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_k u^k\right)\right], \qquad q^i = iM\frac{u^i}{c}, \tag{1.147}$$

où $\dfrac{u^2}{\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_i u^i\right)\right]^2} > c^2$, $d\tau \neq 0$, $dt \neq 0$.

La forme corpusculaire des équations dynamiques du mouvement des particules massives imaginaires (particules supraluminiques-tachyons) diffère également de celles pour les particules subluminiques (1.143), par la présence du coefficient i dans le terme de masse M.

Les grandeurs chr.inv. φ et q^i de la forme ondulatoire du vecteur dynamique dans le cas des particules massives imaginaires, sont identiques à celles des particules massives réelles (1.145). Par suite, (1.146) représente la même forme pour les équations dynamiques du mouvement des particules ondulatoires imaginaires et réelles.

§1.7.3 Equation du mouvement des particules sans masse

D'après (1.99), pour les particules sans masse (du genre lumière) de l'espace-temps étendu (compte tenu de $\mathrm{v}=c$), on a

$$\frac{u^2}{\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_i u^i\right)\right]^2} = c^2, \quad d\tau \neq 0, \quad dt \neq 0. \tag{1.148}$$

Substituant cette formule dans φ et q^i déduits pour les particules massives réelles considérées comme corpusculaires, (dans 1.142), on obtient

$$\varphi = M\frac{u}{c}, \qquad q^i = M\frac{u^i}{c}. \tag{1.149}$$

Les formes corpusculaires des équations dynamiques du mouvement

des particules sans masse s'écrivent respectivement

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(Mu)-\frac{Mu}{c^2}F_iu^i+\frac{M}{c}D_{ik}u^iu^k=0\\&\frac{d}{dt}\big(Mu^i\big)+2M\frac{u}{c}\left(D^i_n+A^{\cdot i}_{n\cdot}\right)u^n-M\frac{u}{c}F^i+M\Delta^i_{nk}u^nu^k=0\end{aligned}\right\}. \quad (1.150)$$

Les quantités chr.inv. φ et q^i pour la forme ondulatoire des particules sans masse, sont identiques aux φ et q^i pour le cas des particules massives (1.145). Les équations dynamiques de propagation des ondes correspondant aux particules sans masse dans le cadre du dualisme onde-corpuscule, sont identiques à celles obtenues pour les particules massives ondulatoires (1.146).

§1.7.4 Equation du mouvement des zéro-particules

Dans l'espace-temps dégénéré, c'est-à-dire sous les conditions de dégénérescence, les projections chr.inv. de P^α prises sous forme corpusculaire sont

$$\varphi=0\,,\qquad q^i=M\frac{u^i}{c}\,, \quad (1.151)$$

où $\mathrm{w}+v_ku^k=c^2$, $d\tau=0$, $dt\neq0$. Appliquant celles-ci aux équations chr.inv. communes du transport parallèle (1.141), on obtient la forme corpusculaire des équations dynamiques du mouvement des zéro-particles

$$\left.\begin{aligned}&\frac{M}{c^2}D_{ik}u^iu^k=0\\&\frac{d}{dt}\big(Mu^i\big)+M\Delta^i_{nk}u^nu^k=0\end{aligned}\right\}. \quad (1.152)$$

Dans l'espace-temps généralisé, les projections chr.inv. φ et q^i pour la forme ondulatoire du vecteur dynamique généralisé P^α, sont

$$\varphi=0\,,\qquad q^i=-\frac{\hbar}{c}h^{ik}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k}\,, \quad (1.153)$$

à partir desquelles on parvient à la forme ondulatoire des équations dynamiques du mouvement des zéro-particules

$$\left.\begin{aligned}&D^m_ku^k\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^m}=0\\&\frac{d}{dt}\left(h^{ik}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k}\right)+h^{mn}\Delta^i_{mk}u^k\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^n}=0\end{aligned}\right\}, \quad (1.154)$$

c'est-à-dire que ce sont les équations dynamiques de propagation des ondes correspondant aux zéro-particules dans le cadre du dualisme onde-particules.

§1.8 Equation du mouvement des géodésiques dans un espace strictement non dégénéré

Dans ce cas, les formes corpusculaires et ondulatoires du vecteur dynamique universel P^α, ont été calculées au §1.3.

§1.8.1 Equations du mouvement des particules massives réelles

D'après (1.78) et (1.67) la forme corpusculaire de P^α pour les particules massives réelles est

$$\varphi = \pm m\,, \qquad q^i = \frac{1}{c}\, m\mathrm{v}^i, \tag{1.155}$$

où $\mathrm{v}^2 < c^2$, $d\tau \neq 0$, $dt \neq 0$. Appliquant ces quantités chr.inv. dans (1.141), on obtient les équations dynamiques du mouvement des particules dont la masse relativiste est positive $m > 0$ (déplacement passé-futur)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\, F_i \mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2}\, D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = 0 \\ &\frac{d\big(m\mathrm{v}^i\big)}{d\tau} + 2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k - mF^i + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{1.156}$$

ainsi que les équations du mouvement des particules de masse relativiste négative $m < 0$ (déplacement futur-passé)

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\, F_i \mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2}\, D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = 0 \\ &\frac{d\big(m\mathrm{v}^i\big)}{d\tau} + mF^i + m\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{1.157}$$

A partir de (1.83) et (1.86), on obtient les équations de la forme ondulatoire de P^α qui sont identiques à celles déduites précédemment pour P^α dans l'espace-temps étendu (1.145)

$$\varphi = \frac{\hbar}{c^2}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\,, \qquad q^i = -\frac{\hbar}{c}\, h^{ik}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k}\,, \tag{1.158}$$

où la variation temporelle de la phase de l'onde physiquement observable $\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}$ est positive pour le déplacement passé-futur, et négative pour celui orienté dans le sens futur-passé. Etant donné que les équations chr.inv.

du transport parallèle de P^α (1.141) dans l'espace-temps strictement non dégénéré doivent être divisées par l'intervalle de temps physiquement observable $d\tau$, on obtient la forme ondulatoire des équations dynamiques du mouvement des particule massives réelles

$$\left.\begin{aligned} &\pm\frac{d}{d\tau}\left(\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\right)+F^i\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i}-D^i_k\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i}=0\\ &\frac{d}{d\tau}\left(h^{ik}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k}\right)-\left(D^i_k+A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\left(\pm\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\mathrm{v}^k-h^{km}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^m}\right)\pm\\ &\qquad\qquad\pm\frac{1}{c^2}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}F^i+h^{mn}\Delta^i_{mk}\mathrm{v}^k\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^n}=0 \end{aligned}\right\}. \tag{1.159}$$

Le premier terme de l'équation temporelle chr.inv. et les deux premiers termes des équations spatiales chr.inv. de (1.159) sont positifs pour le déplacement passé-futur, et négatifs dans le sens inverse.

§1.8.2 Equations du mouvement des particules massives imaginaires

Dans ce cas, la forme corpusculaire de φ et q^i diffère de celle obtenue pour le cas des particules massives réelles (1.155) par la seule présence du multiplicateur $i=\sqrt{-1}$

$$\varphi=\pm im\,,\qquad q^i=\frac{1}{c}\,im\mathrm{v}^i, \tag{1.160}$$

où $\mathrm{v}^2>c^2$, $d\tau\neq 0$, $dt\neq 0$. Corrélativement, la forme corpusculaire des équations dynamiques du mouvement des particules imaginaires (supraluminiques) ne diffèrent de celles déduites pour les particules réelles (subluminiques) que par la présence du coefficient i dans le terme de masse m.

La forme ondulatoire φ et q^i pour les particules massives imaginaires est identique à celle des particules massives réelles (1.158). Les équations dynamiques du mouvement des ondes qui correspondent aux particules massives imaginaires, sont identiques à celles correspondant aux particules réelles (1.159).

Dans le cadre du concept ondulatoire, on voit maintenant qu'il est impossible de distinguer une particule massive se déplaçant à des vitesses inférieures ou supérieures à la lumière (propagation de l'onde). Par contre, dans le cadre du concept corpusculaire, les équations du mouvement des particules supraluminiques (imaginaires) diffèrent de celles des particule subluminiques par la présence du coefficient i dans le terme de masse m.

§1.8.3 Equation du mouvement des particules sans masse

Ici, la forme corpusculaire de φ et q^i prend la forme

$$\varphi = \pm \frac{\omega}{c} = \pm k\,, \qquad q^i = \frac{1}{c}\,k\mathrm{v}^i = \frac{1}{c}\,kc^i, \tag{1.161}$$

où $\mathrm{v}^2 = c^2$, $d\tau \neq 0$, $dt \neq 0$, et où la vitesse de la lumière physiquement observable chr.inv. c^i (1.23) est attribuée à toute particule sans masse

$$\mathrm{v}^i = \frac{dx^i}{d\tau} = c^i, \qquad c_i c^i = h_{ik}\,c^i c^k = c^2. \tag{1.162}$$

En fonction de tous ces paramètres, on obtient ainsi les équations corpusculaires dynamiques du mouvement des particules sans masse.

Ce sont

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\omega}{d\tau} - \frac{\omega}{c^2}\,F_i\,c^i + \frac{\omega}{c^2}\,D_{ik}\,c^i c^k = 0 \\ &\frac{d\left(\omega c^i\right)}{d\tau} + 2\omega\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)c^k - \omega F^i + \omega\Delta^i_{nk}\,c^n c^k = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.163}$$

pour le cas des particules sans masse qui possèdent une fréquence positive relativiste $\omega > 0$ (déplacement passé-futur), et aussi

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d\omega}{d\tau} - \frac{\omega}{c^2}\,F_i\,c^i + \frac{\omega}{c^2}\,D_{ik}\,c^i c^k = 0 \\ &\frac{d\left(\omega c^i\right)}{d\tau} + \omega F^i + \omega\Delta^i_{nk}\,c^n c^k = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.164}$$

pour les particules sans masse avec $\omega < 0$ (déplacement futur-passé).

La forme ondulatoire de φ et q^i pour les particules massives est identique à celle des particules massives (1.158). Les équations dynamiques du mouvement des ondes qui correspondent aux particules sans masse (du genre lumière), sont donc identiques à celles correspondant aux particules massives (1.159). La seule différence réside dans la vitesse observable v^i qui doit maintenant être remplacée par le vecteur de la vitesse de la lumière observable c^i.

§1.9 Un cas particulier : les équations des géodésiques

Que sont les équations des géodésiques ? Ainsi que nous l'avons mentionné au §1.1, ce sont les équations cinématiques du mouvement des particules le long des trajectoires les plus courtes (géodésiques). Du point de vue géométrique les équations des géodésiques sont les équa-

tions du transport parallèle de Levi-Civita

$$\frac{\mathrm{D}Q^\alpha}{d\rho} = \frac{dQ^\alpha}{d\rho} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} Q^\mu \frac{dx^\nu}{d\rho} = \frac{d^2x^\alpha}{d\rho^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\rho}\frac{dx^\nu}{d\rho} = 0 \tag{1.165}$$

du 4-vecteur cinématique $Q^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\rho}$, qui est tangent en chaque point de la trajectoire. Les équations des géodésiques non isotropes (fixant les trajectoires des particules massives libres) s'écrivent

$$\frac{\mathrm{D}Q^\alpha}{ds} = \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0\,, \qquad Q^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}\,, \tag{1.166}$$

tandis que les les équations des géodésiques isotropes (fixant les trajectoires des particules libres sans masse), sont

$$\frac{\mathrm{D}Q^\alpha}{d\sigma} = \frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0\,, \qquad Q^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\sigma}\,. \tag{1.167}$$

D'autre part, chaque vecteur cinématique similaire à la fois au vecteur dynamique P^α de la particule massive, et au vecteur d'onde K^α d'une particule dépourvue de masse, n'est qu'un cas particulier du vecteur arbitraire Q^α pour lequel ont été obtenues les équations universelles chr.inv. du transport parallèle. Par suite, en substituant les projections chr.inv. (φ et q^i) du vecteur cinématique de la particule massive dans les équations universelles chr.inv. du transport parallèle (1.141), on doit trouver immédiatement les équations géodésiques non isotropes sous forme chr.inv. De la même façon, la substitution de φ et q^i du vecteur cinématique d'une particule sans masse doit conduire aux équations chr.inv. des géodésiques isotropes.

Pour le vecteur cinématique des particules massives, on a

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{g_{0\alpha}Q^\alpha}{\sqrt{g_{00}}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}} \\ q^i &= Q^i = \frac{dx^i}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\frac{dx^i}{c\,d\tau} = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\,\mathrm{v}^i \end{aligned}\right\}. \tag{1.168}$$

Pour les particules sans masse, compte tenu de $d\sigma = c\,d\tau$, sur les trajectoires isotropes, il vient

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \sqrt{g_{00}}\,\frac{dx^0}{d\sigma} + \frac{1}{c\sqrt{g_{00}}}\,g_{0k}\,c^k = \pm 1 \\ q^i &= \frac{dx^i}{d\sigma} = \frac{dx^i}{c\,d\tau} = \frac{1}{c}\,c^i \end{aligned}\right\}. \tag{1.169}$$

Substituant ces derniers φ et q^i dans les équations universelles chr. inv. du transport parallèle (1.141), on obtient les équations géodésiques chr.inv. des géodésiques non isotropes (particules massives libres)

$$\left.\begin{aligned}
&\pm\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\right)-\frac{F_i\mathrm{v}^i}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}+\frac{D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k}{c^2\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}=0\\
&\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mathrm{v}^i}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\right)\mp\frac{F^i}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}+\frac{\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}+\\
&\qquad\qquad+\frac{(1\pm1)}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\left(D^i_k+A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k=0
\end{aligned}\right\}\tag{1.170}$$

et également les équations géodésiques chr.inv. des géodésiques isotropes (particules libres sans masse)

$$\left.\begin{aligned}
&D_{ik}c^ic^k-F_ic^i=0\\
&\frac{dc^i}{d\tau}\mp F^i+\Delta^i_{nk}c^nc^k+(1\pm1)\left(D^i_k+A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)c^k=0
\end{aligned}\right\}.\tag{1.171}$$

Le signe supérieur dans les termes alternés représente le déplacement des particules du passé vers le futur (écoulement du temps direct), tandis que le signe inférieur représente le déplacement du futur dans le passé (écoulement du temps inverse). Il apparaît donc que nous sommes en présence d'une asymétrie du mouvement le long de l'axe du temps. La même asymétrie a été trouvée dans les équations dynamiques du mouvement. Cette asymétrie est indépendante des propriétés physiques des particules en mouvement, mais elle est plutôt fonction des propriétés de l'espace de référence de l'observateur (en réalité les propriétés de son corps de référence), comme par exemple F^i, A_{ik}, D_{ik}. En l'absence de force d'inertie gravitationnelle, de rotation ou déformation de l'espace de référence, cette asymétrie disparaît.

§1.10 Un cas particulier : les lois de Newton

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer que les équations dynamiques chr.inv. du mouvement des particules massives sont les généralisations quadridimensionnelles de la première et seconde loi de Newton dans l'espace (espace-temps) non holonome (en rotation, $A_{ik}\neq0$, et déformé, $D_{ik}\neq0$), qui renferme également un champ gravitationnel ($F^i\neq0$).

Aux faibles vitesses, on a $m = m_0$, et les équations dynamiques du mouvement généralement covariantes prennent la forme

$$\frac{\mathrm{D}P^\alpha}{ds} = m_0 \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + m_0 \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0\,, \tag{1.172}$$

qui, lorsqu'elles sont divisées par m_0, deviennent automatiquement cinématiques, c'est-à-dire que ce sont des équations classiques non isotropes.

Ces dernières sont les équations dynamiques du mouvement de particules libres soumises à un champ gravitationnel.

Sous l'action conjuguée de ce champ de gravitation et du champ non gravitationnel R^α, ce mouvement devient non géodésique

$$m_0 \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + m_0 \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = R^\alpha. \tag{1.173}$$

Toutes ces équations dynamiques s'écrivent dans *l'espace-temps quadridimensionnel*, alors que les lois de Newton ne s'appliquaient que pour *l'espace tridimensionnel*. En particulier, le paramètre de dérivation commun utilisé dans ces équations qui est l'intervalle spatio-temporel, est inapplicable à l'espace à trois dimensions.

Examinons maintenant les équations chr.inv. du mouvement des particules massives. Aux faibles vitesses, il vient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{m_0}{c^2}\left(D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k - F_i\mathrm{v}^i\right) = 0 \\ &m_0\frac{d^2x^i}{d\tau^2} - m_0F^i + m_0\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k + 2m_0\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{1.174}$$

où les projections spatiales chr.inv. sont en réalité les équations dynamiques du mouvement, le long de la section spatiale (3-espace).

Dans un espace quadridimensionnel (espace-temps), où les section spatiales admettent la métrique Euclidienne, toutes les quantités $h^k_i = \delta^k_i$, et le tenseur des déformations d'espace est nul $D_{ik} = \frac{1}{2}\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial t} = 0$. Dans ce cas, $\Delta^i_{kn} = 0$, d'où $m_0\,\Delta^i_{nk}\mathrm{v}^n\mathrm{v}^k = 0$. Si de plus, $F^i = 0$ et $A_{ik} = 0$, les projections spatiales chr.inv. des équations du mouvement prennent la forme

$$m_0 \frac{d^2x^i}{d\tau^2} = 0\,, \tag{1.175}$$

ou encore

$$\mathrm{v}^i = \frac{dx^i}{d\tau} = const. \tag{1.176}$$

Par conséquent, les généralisations quadridimensionnelles de la *première loi de Newton* pour les particules massives peuvent s'énoncer :

PREMIÈRE LOI DE NEWTON :
Une particule non soumise à l'action de forces d'inertie gravitationnelle (ou lorsqu'elles sont équilibrées), et en l'absence de rotation et déformation d'espace, suit un mouvement rectiligne et uniforme.

Comme on le voit d'après la formule des symboles de Christoffel (1.132–1.137), une telle condition n'est possible que lorsque tous les $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$, puisque chaque composante des symboles de Christoffel est uniquement fonction d'au moins une des quantités F^i, A_{ik}, D_{ik}.

Supposons maintenant que $F^i \neq 0$, mais $A_{ik} = 0$ et $D_{ik} = 0$. Dans ce cas, les équations chr.inv. du mouvement seront

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = F^i. \tag{1.177}$$

Par contre, le potentiel gravitationnel et la force F^i, ainsi que les quantités A_{ik} et D_{ik} décrivent par définition le corps de référence et son espace local. La quantité F^i fixe la force d'inertie gravitationnelle qui agit sur la particule de masse unité. Une masse m_0 est soumise à la force

$$\Phi^i = m_0 F^i, \tag{1.178}$$

de telle sorte que les équations spatiales chr.inv. du mouvement deviennent

$$m_0 \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \Phi^i. \tag{1.179}$$

D'une façon analogue, on peut énoncer les généralisations quadridimensionnelles de la *seconde loi de Newton* pour une particule massive :

SECONDE LOI DE NEWTON :
L'accélération communiquée à une particule par un champ de gravitation est proportionnelle à la force d'inertie gravitationnelle qui agit sur cette particule de la part du champ, et en raison inverse de la masse en l'absence de rotation et déformation de l'espace.

En substituant n'importe quelle valeur de la force d'inertie gravitationnelle Φ^i équations spatiales du mouvement chr.inv. constituant la deuxième équation (1.174)

$$m_0 \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + m_0 \Delta^i_{nk} \mathrm{v}^n \mathrm{v}^k + 2 m_0 \left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot} \right) \mathrm{v}^k = \Phi^i, \tag{1.180}$$

on peut résoudre les équations qui permettent de déduire les coordonnées tridimensionnelles observables de la particule massive à chaque instant (trajectoire de la particule).

Ainsi qu'on peut le voir, la présence de la force d'inertie gravitationnelle n'est plus obligatoire pour incurver le mouvement ou le rendre irrégulier. Cette circonstance se présente lorsqu'une au moins des quantités F^i, A_{ik}, D_{ik} n'est pas nulle. Par conséquent, en théorie, même en l'absence de force inertielle de gravitation, une particule peut être soumise à des mouvements incurvés ou irréguliers à condition que l'espace entre rotation ou se déforme, ou bien les deux à la fois.

Si une particule se meut sous l'action conjuguée d'une force d'inertie et de gravitation Φ^i et d'une force R^i de nature non gravitationnelle, les équations du mouvement spatial tridimensionnel chr.inv. pour une particule, seront

$$m_0 \frac{d^2x^i}{d\tau^2} + m_0 \Delta^i_{nk} \mathrm{v}^n \mathrm{v}^k + 2m_0 \left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right) \mathrm{v}^k = \Phi^i + R^i. \qquad (1.181)$$

Etant donné un espace plan tridimensionnel, la condition $\Delta^i_{kn} = 0$ est vérifiée : le deuxième terme des équations s'évanouit.

Du fait qu'un tel espace (espace-temps) est dépourvu de rotation et déformation, les équations du mouvement spatial tridimensionnel chr.inv. de la particule prennent la forme

$$m_0 \frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \Phi^i, \qquad m_0 \frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \Phi^i + R^i, \qquad (1.182)$$

avec respectivement la présence de la force d'inertie gravitationnelle Φ^i seule, puis, avec une force non gravitationnelle supplémentaire R^i qui dévient toutes deux la particule d'une ligne géodésique.

Nous avons donc prouvé que tout mouvement soumis à l'action de forces d'inertie gravitationnelles, est possible à la fois dans un espace courbe et dans un espace plan. Pourquoi ?

On sait que la courbure de l'espace riemannien est caractérisée par le tenseur de Riemann-Christoffel $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, construit à l'aide des dérivées première et seconde du tenseur métrique fondamental $g_{\alpha\beta}$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace riemannien soit courbe est alors $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$. Pour avoir une courbure non nulle, il faut et il suffit que les dérivées secondes de $g_{\alpha\beta}$ soient différentes de zéro.

Par ailleurs, on sait également que dans un espace plan, les dérivées premières du tenseur métrique fondamental peuvent être non nulles.

Les équations du mouvement chr.inv. contiennent les quantités Δ^i_{kn}, F^i, A_{ik}, D_{ik} qui dépendent des dérivées premières de $g_{\alpha\beta}$. Il s'ensuit que pour $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ (espace plan) les symboles de Christoffel Δ^i_{kn}, la force d'inertie gravitationnelle F^i, la rotation d'espace A_{ik} et sa déformation D_{ik}, peuvent ne pas être nulles.

§1.11 Analyse des équations : les transitions ultimes entre l'espace de base et le zéro-espace

Pour $\mathrm{w} = -v_i u^i$ dans nos formules, aux grandeurs de l'espace-temps étendu ($g \leqslant 0$) se substituent celles d'un espace-temps strictement non dégénéré ($g < 0$)

$$d\tau = \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w} + v_i u^i\right)\right] dt = dt\,, \tag{1.183}$$

$$u^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\tau} = \mathrm{v}^i, \tag{1.184}$$

$$M = \frac{m}{1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w} + v_i u^i\right)} = m\,, \tag{1.185}$$

$$P^0 = M = m\,, \qquad P^i = \frac{1}{c} M u^i = \frac{1}{c}\, m\mathrm{v}^i, \tag{1.186}$$

et lors de cette transition, la coordonnée temporelle coïncide avec le temps physiquement observable τ.

Bien entendu, dès que $\mathrm{w} \to 0$ (champ gravitationnel faible) avec $v_i = 0$ (absence de rotation spatiale), la transformation s'effectue aussi sous la condition plus restrictive $\mathrm{w} = -v_i u^i = 0$. D'autre part, il est douteux de pouvoir trouver dans notre Univers observable, une région dépourvue de rotation et de champs gravitationnels. On voit donc que la transition vers l'espace-temps classique (strictement non dégénéré) se produit toujours pour

$$\mathrm{w} = -\,v_i u^i = -\,v_i \mathrm{v}^i. \tag{1.187}$$

Substituant cette condition dans les équations du mouvement trouvées au §1.7 et §1.8, nous sommes amenés aux conclusions suivantes concernant la structure géométrique de l'espace-temps étendu.

Dans l'espace-temps étendu, les équations corpusculaires du mouvement (*particules pleines*) deviennent à *part entière celles* de l'espace-temps classique (strictement non dégénéré), c'est-à-dire que n'apparaît ou disparaît aucun terme nouveau ou non, dans le cas de l'orientation du mouvement passé-futur, ($m > 0$, $im > 0$, $\omega > 0$). Pour des particules pleines dont le mouvement est orienté du futur vers le passé ($m < 0$, $im < 0$, $\omega < 0$), cette transformation est *incomplète*.

Par ailleurs, les équations d'onde du mouvement (*particules ondulatoires*) dans l'espace-temps étendu se transforment entièrement en celles de l'espace-temps classique pour les deux types de particules avec respectivement, $m > 0$, $im > 0$, $\omega > 0$ (déplacement passé-futur) et $m < 0$, $im < 0$, $\omega < 0$ (déplacement futur-passé).

Au §1.12, nous allons analyser la raison de cette circonstance.

Dans l'espace-temps classique ($g<0$), on a P^0 (1.67), qui après substitution de $\frac{dt}{d\tau}$ (1.73) avec la condition de transition $\mathrm{w}=-v_i u^i=-v_i \mathrm{v}^i$, se résout à la masse relativiste dont le signe est alterné

$$P^0 = m\,\frac{dt}{d\tau} = \frac{m}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\left(\frac{1}{c^2}\,v_i \mathrm{v}^i \pm 1\right) = \pm\, m\,. \tag{1.188}$$

Dans l'espace-temps étendu, ($g \leqslant 0$), nous avions obtenu $P^0=M$ au moyen d'une autre méthode (1.104) sans utiliser $\frac{dt}{d\tau}$, qui est à l'origine du signe alterné présent dans la formule (1.188).

Par suite, la composante $P^0=\pm m$ obtenue dans l'espace-temps classique (1.188) et qui prend deux valeurs numériques, ne peut constituer un cas particulier de la valeur unique $P^0=M$ déduite pour l'espace-temps étendu.

Pour en comprendre la raison, nous allons passer de la formule à signe alterné $P^0=\pm m$ de l'espace-temps classique, à la formule $P^0=M$ de l'espace-temps étendu. Il est aisé de procéder ainsi en substituant la relation déjà établie entre la vitesse physiquement observable v^i et la vitesse des coordonnées u^i (1.99) dans la formule à signe alterné $P^0=\pm m$ (1.188).

De la sorte, nous obtenons une relation développée pour la composante P^0 de l'espace-temps étendu

$$P^0 = \frac{m}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}}\left[\frac{1}{c^2}\,\frac{v_i u^i}{1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_i u^i\right)} \pm 1\right], \tag{1.189}$$

qui prend maintenant évidemment en compte le signe alterné. Pour les particules se déplaçant du passé vers le futur dans l'espace-temps étendu, P^0 devient

$$P^0 = \frac{m}{1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_i u^i\right)} = +M\,, \tag{1.190}$$

qui est identique à (1.104). Pour les particules dont l'orientation du mouvement est inverse, P^0 s'écrit

$$P^0 = \frac{m\left[\frac{1}{c^2}\big(2v_i u^i+\mathrm{w}\big)-1\right]}{\big(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\big)\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w}+v_i u^i\right)\right]} = -M\,. \tag{1.191}$$

Ce sont donc les deux formules généralisées finales pour P^0. Naturellement, dans le cadre de l'espace-temps classique, la première formule

$P^0 = +M$ (1.190) se réduit sans ambiguïté à $P^0 = +m$, tandis que la seconde formule $P^0 = -M$ (1.191) devient $P^0 = -m$.

Les remarques soulevées à propos des formules dont le signe est alterné, n'ont aucune conséquence sur les équations du mouvement obtenues dans le cadre de l'espace-temps étendu. Ceci résulte du fait que les équations du mouvement déduites comprennent la masse rotationnelle de gravitation dans l'expression de M, quelque soient ses éléments constitutifs. Substituant ces deux valeurs de M dans les équations du mouvement, on aboutit à seulement deux types d'équations : l'équation du mouvement du passé vers le futur, et celle de l'orientation inverse.

Revenons à présent à la condition physique $\mathrm{w} = -v_i u^i$ (1.187) qui traduit la transition des équations dynamiques du mouvement de l'espace-temps étendu vers celles de l'espace-temps classique. Sous cette dernière condition, nous avions trouvé que $d\tau = dt$ (1.183). Par ailleurs, on sait que cette égalité $d\tau = dt$ n'est pas impérative dans l'espace-temps classique. Bien au contraire, dans l'Univers observé, l'intervalle de temps physiquement observable $d\tau$ est presque toujours légèrement différent de la coordonnée de temps dt.

Il s'ensuit que la condition de transition ultime de l'espace-temps étendu vers l'espace-temps classique $\mathrm{w} = -v_i u^i$, n'est pas caractérisé dans l'espace-temps classique. Cette circonstance reflète-elle une contradiction entre les équations du mouvement de l'espace-temps classique et celles de l'espace-temps étendu ? La réponse est non. Toutes les lois applicables à l'espace-temps classique ($g < 0$) sont également valables dans une région non dégénérée ($g < 0$) de l'espace-temps étendu ($g \leqslant 0$). Ces deux régions non dégénérées sont néanmoins *distinctes*. C'est-à-dire que l'espace-temps dégénéré juxtaposé à l'espace-temps classique produit deux variétés absolument différenciées. L'espace-temps étendu est une variété distincte qui est formellement indépendante de chacun des espace-temps strictement non dégénéré ou dégénéré. Il n'est donc pas surprenant que la transition considérée ne puisse s'opérer que sous certaines conditions particulières très limitées.

La seule question à envisager est celle de la configuration possible de ces variétés dans l'Univers observable. Deux options se présentent :

a) L'espace-temps non dégénéré ($g < 0$) et l'espace-temps dégénéré ($g = 0$) existent en tant que *deux variétés distinctes* : l'espace-temps classique de la relativité générale "doté" d'un zéro-espace ;

b) L'espace-temps non dégénéré et l'espace-temps dégénéré existent en tant que *deux régions internes de la même variété* — l'espace-temps étendu ($g \leqslant 0$) déjà envisagé.

Dans les deux cas, la transition ultime de l'espace-temps non dégénéré vers l'espace-temps dégénéré est physiquement conditionnée par (1.98). On peut espérer que de futures observations et expérimentations astronomiques, permettent de trancher quant à la réalité de l'existence de l'une ou l'autre option.

§1.12 Analyse des équations : asymétrie de l'espace et Univers au delà du miroir

Comparons les équations corpusculaires du mouvement pour les particules avec $m > 0$ (1.156) et $\omega > 0$ (1.163), avec celles des particules pour lesquelles $m < 0$ (1.157) et $\omega < 0$ (1.164).

On se rend compte immédiatement que les équations corpusculaires du mouvement (particules pleines) orienté dans le sens passé-futur, diffèrent de celles dont le mouvement est orienté dans le sens futur-passé. Quelle en est la raison ?

Du seul point de vue géométrique, l'asymétrie des équations du mouvement dans le futur ou le passé s'explique de la façon suivante :

> Dans notre espace-temps quadridimensionnel, courbe, inhomogène (espace pseudo-Riemanien), existe une *asymétrie primordiale* entre les directions orientées vers le futur et celles orientées vers le passé.

Illustrons l'origine de cette asymétrie à l'aide d'un exemple.

A l'intérieur de notre espace-temps quadridimensionnel, nous supposerons qu'il existe un *miroir* qui coïncide avec la section spatiale, et donc sépare le passé du futur. Nous supposerons de plus que ce miroir réfléchit aussi bien les particules que les ondes provenant du passé comme du futur. Dans ce cas, les particules et les ondes provenant du passé vers le futur ($m > 0$, $im > 0$, $\omega > 0$) atteignent le miroir puis rebondissent vers le passé de telle façon que leurs propriétés s'inversent ($m < 0$, $im < 0$, $\omega < 0$). Corrélativement, les particules et les ondes se déplaçant du futur vers le passé ($m < 0$, $im < 0$, $\omega < 0$) vont heurter le miroir et voir se changer le signe de leur propriétés ($m > 0$, $im > 0$, $\omega > 0$) pour rebondir vers le futur.

A l'aide de ce *concept du miroir*, on comprend mieux le processus. Examinons l'aspect ondulatoire des équations du mouvement (1.159). Après réflexion sur le miroir, la grandeur $\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}$ change de signe. Il s'ensuit que les équations de propagation des ondes orientées vers le futur ("plus" dans les équations), deviennent celles des mêmes ondes se propageant dans le passé ("moins" dans les équations), et *vice versa*, les équations

de propagation des ondes dans le passé ("moins"), après réflexion sur le miroir deviennent celles des ondes se propageant vers le furur ("plus").

Il convient de noter que les équations de propagation des ondes orientées vers le futur et celles orientées dans le passé se transforment entièrement l'une dans l'autre, c'est-à-dire qu'aucun terme ne s'annule, s'ajoute ou se retranche. Par suite, la *réflexion du miroir conserve entièrement* la forme ondulatoire de la matière.

Il n'en va pas de même pour les particules corpusculaires. Une fois réfléchie par le miroir, la quantité $\varphi = \pm m$ associée à la particule massive et $\varphi = \pm k = \pm \frac{\omega}{c}$ associée à la particule sans masse, changent de signe. Par contre, les équations corpusculaires du mouvement vers le futur *ne se transforment pas complètement* dans les celles du mouvement dans le passé. Les équations spatiales chr.inv. du mouvement vers le futur contiennent en effet un terme supplémentaire qui n'existe pas dans les équations spatiales chr.inv. du mouvement dans le passé. Ce terme lié respectivement aux particules avec et sans masse s'écrit

$$2m\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)\mathrm{v}^k, \qquad 2k\left(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\right)c^k. \tag{1.192}$$

Par conséquent une particule qui se déplace du passé vers le futur atteint le miroir et rebondit en perdant un terme dans ses équations spatiales chr.inv. du mouvement, et *vice versa*, une particule se déplaçant du futur dans le passé rebondira en gagnant un terme supplémentaire dans ses équations spatiales du mouvement chr.inv. Nous avons donc obtenu le résultat important suivant lequel le miroir lui-même perturbe les trajectoires des particules !

Il en résulte qu'une particule de masse et fréquence négatives, n'est pas une *simple* réflexion par le dot miroir d'une particule dont la masse et la fréquence sont positives Dans l'un ou l'autre cas se rapportant aux particules pleines ou ondulatoires, il ne s'agit pas d'une réflexion simple ou d'un rebond par le miroir, mais véritablement d'une *entrée* à travers le miroir dans un *Univers miroir*. A l'intérieur de cet Univers, toutes les particules sont douées de masse et fréquence négatives et se meuvent du futur dans le passé (vu par un observateur situé dans notre Univers).

Les particules ondulatoires de notre Univers n'ont aucune influence sur l'Univers miroir, de même que les particules ondulatoires de l'Univers miroir ne nous influencent pas. Par contre, les particules pleines de notre Univers peuvent affecter notre Univers.

L'isolement intégral entre les deux Univers, c'est-à-dire l'absence d'influence mutuelle des particules de chaque Univers, est conditionné par la relation

$$D^i_k \mathrm{v}^k = -A^{\cdot i}_{k\cdot}\mathrm{v}^k, \tag{1.193}$$

qui annule le terme asymétrique (1.192) des équations corpusculaires du mouvement.

Cette circonstance se produit seulement si $A^{\cdot i}_{k\cdot} = 0$ et $D^i_k = 0$, c'est-à-dire en l'absence de rotation et déformation dans une région d'espace (espace-temps).

Remarquons que si les particules de masse positive (fréquence) coexistaient avec celles de masse négative (fréquence), il en résulterait une annihilation inévitable ne laissant aucune d'entre elles dans notre Univers. Bien au contraire, on observe rien de tel.

Dans la second partie de notre analyse sur les équations déduites, on parvient donc aux conclusions suivantes :

1) L'asymétrie (fondamentale) primordiale entre les directions d'espace-temps vers le futur et dans le passé, est réalisée par un miroir donné coïncidant géométriquement avec la section spatiale de l'observateur, réfléchissant ainsi toutes les particules et les ondes en les repoussant du côté passé ou du futur. Corrélativement, le miroir d'espace-temps retient des propriétés physiques distinctes de celles de l'espace-temps classique en satisfaisant les propriétés physiques particulières dans une région d'espace-temps complètement dégénérée (zéro-espace), dans lequel le temps physiquement observable se fige. Manifestement, un tel miroir d'espace-temps joue le rôle de l'ensemble d'un zéro-espace ou d'une région qui s'y rattache ;

2) L'espace-temps se décompose en notre Univers, et l'Univers miroir. Dans notre Univers (masses relativistes et fréquences positives), les particules et les ondes se déplacent du passé vers le futur. Dans l'Univers miroir (masses relativistes et fréquences négatives),les particules et les ondes se déplacent du futur dans le passé ;

3) Si des particules appartenant à notre Univers, pouvait pénétrer à travers le miroir, elles sembleraient douées de masses et de fréquences négatives, en se mouvant du futur dans le passé ;

4) Nous n'observons ni particule de masse ou fréquence négative, ni onde dont la phase est négative, car celles-ci n'existent que dans l'Univers miroir ou au delà du miroir. Seules peuvent être observées les particules et ondes de notre Univers, ou celles immédiatement à la sortie du miroir (particules qui nous semblent rebondir du miroir) telles qu'elles émergent de l'Univers miroir, et donc, toutes les particules que nous observons se déplacent du passé vers le futur.

§1.13 Les conditions physiques caractérisant l'écoulement du temps direct et inverse

Dans ce paragraphe, nous allons examiner les conditions physiques pour lesquelles : a) l'écoulement du temps est direct (du passé vers le futur) ; b) l'écoulement du temps est indirect (du futur vers le passé) ; c) le temps se fige.

En relativité générale, le temps est déterminé par la 4ème coordonnée $x^0 = ct$ de l'espace-temps quadridimensionnel, où c est la vitesse de la lumière et t est la coordonnée temporelle. Intrinsèquement, la formule nous indique que le temps t varie même si la vitesse c varie aussi, sans toutefois dépendre des conditions physiques de l'observation. Par suite, la coordonnée t est également appelée le *temps idéal*. En dehors de ce temps idéal, existe le temps physiquement observable τ (*temps réel*) qui lui, dépend étroitement des conditions de l'observation. La théorie des invariants chronométriques détermine l'intervalle du temps physiquement observable, comme étant la projection chr.inv. de l'accroissement de la coordonnée quadridimensionnelle dx^α sur la ligne de temps de l'observateur

$$d\tau = \frac{1}{c}\, b_\alpha dx^\alpha. \tag{1.194}$$

Dans le système de référence accompagnant un observateur standard (matériel) subluminique, $d\tau$ est d'après (1.21)

$$d\tau = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) dt - \frac{1}{c^2}\, v_i dx^i = dt - \frac{1}{c^2}\, \mathrm{w} dt - \frac{1}{c^2}\, v_i dx^i. \tag{1.195}$$

On voit alors clairement que $d\tau$ est constitué de trois parties : a) l'intervalle de la coordonnée du temps dt, b) l'intervalle du temps "gravitationnel", $dt_\mathrm{g} = \frac{1}{c^2}\, \mathrm{w} dt$, et c) l'intervalle du temps de "rotation" $dt_\mathrm{r} = \frac{1}{c^2}\, v_i dx^i$. Plus le champ de gravité du corps de l'observateur est intense et plus rapide sera la rotation de son espace (espace de référence de l'observateur). Théoriquement, un champ gravitationnel suffisamment intense, conjugué à une rotation d'espace très rapide peuvent interrompre l'écoulement du temps physiquement observable.

Nous définirons alors *l'Univers-miroir* comme l'espace-temps dans lequel l'orientation du temps est inversée par rapport à celle de notre propre référentiel qui est attaché à notre espace-temps.

La direction de la coordonnée temporelle t qui décrit le déplacement le long de l'axe du temsp $x^0 = ct$ est donnée par le signe de la dérivée $\frac{dt}{d\tau}$. Corrélativement, le signe de la dérivée $\frac{d\tau}{dt}$ indique la direction du temps physiquement observable τ.

Au §1.3, nous avions obtenu la fonction de la coordonnée temporelle $\frac{dt}{d\tau}$ (1.73), qui se déduit de la condition de conservation de la quadrivitesse d'une particule subluminique, du genre lumière ou supraluminique le long de sa trajectoire quadridimensionnelle (1.69–1.71). Par ailleurs, la fonction de la coordonnée temporelle peut être également obtenue en exprimant l'intervalle d'espace-temps $ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2$, sous la forme

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 - 2\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) v_i\, dx^i dt + g_{ik}\, dx^i dx^k. \qquad (1.196)$$

On peut voir que l'élément de distance d'espace-temps entre deux points infiniment voisins d'Univers va se résoudre à la distance spatiale $g_{ik}\, dx^i dx^k$, ainsi qu'à deux termes qui dépendent des propriétés physiques de l'espace (espace-temps).

Le terme $\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) c\,dt$ résulte de la quatrième dimension (le temps) et le potentiel de gravitation w qui caractérise le champ du corps de référence. En l'absence du champ gravitationnel, la coordonnée temporelle $x^0 = ct$ varie également avec la vitesse de la lumière. Dès que $\mathrm{w} \neq 0$, la variation de la coordonnée x^0 est "ralentie" par la quantité $\frac{\mathrm{w}}{c^2}$. Plus le potentiel de gravitation w est intense, et plus lent sera l'écoulement du temps. Pour $\mathrm{w} = c^2$, la coordonnée temporelle se fige complètement. On sait qu'il s'agit là de la condition imposée par l'état d'effondrement gravitationnel.

Le terme $\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) v_i\, dx^i dt$ résulte de l'action conjuguée de la force d'inertie gravitationnelle et de la rotation d'espace. Celui-ci ne s'annule pas seulement pour $\mathrm{w} \neq c^2$ (en dehors du collapse gravitationnel) mais également pour $v_i \neq 0$ (l'espace est non holonome, c'est-à-dire lorsque l'espace subit une rotation).

Divisant les deux parties de (1.196) par $ds^2 = c^2 d\tau^2 \left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)$, on obtient la même expression quadratique qu'en (1.72), qui a deux solutions (1.73). En procédant des solutions de (1.73), on voit que la coordonnée temporelle s'accroît $\frac{dt}{d\tau} > 0$, se fige $\frac{dt}{d\tau} = 0$, puis décroît $\frac{dt}{d\tau} < 0$ sous les conditions suivantes

$$\frac{dt}{d\tau} > 0 \qquad \text{si} \quad v_i \mathrm{v}^i > \pm c^2, \qquad (1.197)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = 0 \qquad \text{si} \quad v_i \mathrm{v}^i = \pm c^2, \qquad (1.198)$$

$$\frac{dt}{d\tau} < 0 \qquad \text{si} \quad v_i \mathrm{v}^i < \pm c^2. \qquad (1.199)$$

Les particules classiques (matérielles) que l'on observe, se déplacent à des vitesses inférieures à la lumière. Il s'ensuit que la condition sous

laquelle la coordonnée temporelle se fige $v_i \mathrm{v}^i = \pm c^2$ (1.198), ne peut être satisfaite dans l'Univers matériel, mais est toutefois admissible pour d'autres états de la matière (matière du genre lumière par exemple).

La coordonnée temporelle s'accroît ($\frac{dt}{d\tau} > 0$) pour $v_i \mathrm{v}^i > \pm c^2$. Dans un laboratoire classique, la vitesse linéaire de rotation d'espace (par ex. la vitesse linéaire de rotation journalière de la terre) est inférieure à la vitesse de la lumière. Par conséquent, dans ce laboratoire, nous aurons $v_i \mathrm{v}^i > -c^2$ (l'angle α entre la vitesse linéaire de rotation d'espace, et la vitesse observable de la particule est dans la limite $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Pour une telle situation classique, l'écoulement de la coordonnée temporelle est direct, les particules se déplacent dans le sens passé-futur.

La coordonnée temporelle décroît ($\frac{dt}{d\tau} < 0$) pour $v_i \mathrm{v}^i < \pm c^2$.

Jusqu'à présent, nous n'avions envisagé que l'écoulement direct de la coordonnée temporelle t. Nous allons maintenant analyser les directions possibles du temps physiquement observable τ qui dépend du signe de la dérivée $\frac{d\tau}{dt}$. Afin d'obtenir une formule pour cette dérivée, nous divisons celle déduite pour $d\tau$ (1.195) par dt. On trouve

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{w} + v_i u^i\right). \tag{1.200}$$

Par définition, l'horloge de n'importe quel observateur classique mesure les intervalles de temps quelque soit le sens de rotation de celle-ci. Il s'ensuit que dans un laboratoire classique lié à la terre, le temps physiquement observable peut s'accroître ou se figer, mais jamais décroître. Cependant, sous certaines circonstances particulières, ce temps obervable peut décroître ($\frac{d\tau}{dt} < 0$).

D'après (1.200), on observe que le temps physiquement observable s'accroît, s'arrête ou décroît selon les conditions respectives

$$\frac{d\tau}{dt} > 0 \qquad \text{si} \quad \mathrm{w} + v_i u^i < c^2, \tag{1.201}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = 0 \qquad \text{si} \quad \mathrm{w} + v_i u^i = c^2, \tag{1.202}$$

$$\frac{d\tau}{dt} < 0 \qquad \text{si} \quad \mathrm{w} + v_i u^i > c^2. \tag{1.203}$$

Manifestement, la condition d'arrêt du temps observable $\mathrm{w} + v_i u^i = c^2$ est aussi la condition de dégénérescence de l'espace-temps (1.98). Dans le cas particulier où l'espace est dépourvu de rotation, le temps observable se fige avec le collapse gravitationnel $\mathrm{w} = c^2$.

D'une façon générale, l'état du zéro-espace peut être donné par n'importe quelle ensemble de conditions physiques où $\mathrm{w} + v_i u^i = c^2$. L'état

de collapse gravitationnel ($\mathrm{w} = c^2$) n'est qu'un cas particulier de cet ensemble de conditions, qui apparaît en l'absence de rotation ($v_i = 0$). Autrement dit, la *membrane du miroir* qui sépare l'Univers à écoulement du temps direct et celui à écoulement du temps indirect (Univers miroir), n'est pas une région particulière du zéro-espace dans lequel se produit l'effondrement gravitationnel, mais le zéro-espace en général.

Quel est donc l'écoulement de la coordonnée temporelle t, et celui du temps physiquement observable τ ?

Dans la fonction de la coordonnée temporelle $\frac{dt}{d\tau}$, on suppose que le temps réel mesuré par tout observateur, la grandeur τ, est la valeur standard par rapport à laquelle la coordonnée temporelle t est déterminée. Pour chaque calcul ou observation, nous sommes liés à l'observateur lui-même. Il en découle que la fonction de la coordonnée temporelle révèle le mouvement de l'observateur le long de l'axe du temps $x^0 = ct$, observé se son propre point de vue.

Dans la fonction du temps observable $\frac{d\tau}{dt}$, le standard par rapport auquel l'observateur compare ses mesures, est sa coordonnée temporelle t. C'est-à-dire que le temps physiquement observable $d\tau$ enregistré par l'observateur est déterminé par rapport au mouvement de la section spatiale entière de l'observateur le long de l'axe du temps (ce mouvement apparaît régulièrement à la vitesse de la lumière). Par conséquent, la fonction du temps observable $\frac{d\tau}{dt}$ indique une vue "extérieure" de l'observateur, révélant ainsi son *véritable mouvement* par rapport à l'axe du temps.

En d'autres termes, la fonction de la coordonnée temporelle $\frac{dt}{d\tau}$, révèle la membrane du point de vue de l'observateur même (sa logique reconnaît toujours le temps observable comme un écoulement passé-futur). La fonction du temps observable $\frac{d\tau}{dt}$ donne elle, un aperçu résumé "extérieur" de la membrane. Cette fonction du temps observable révèle donc la *véritable structure* de la membrane d'espace-temps séparant notre Univers, de l'Univers miroir dans lequel le temps s'écoule en sens inverse.

§1.14 Introduction de l'Univers Miroir

Afin d'avoir une description plus claire des membranes d'espace-temps, nous allons utiliser un *système de référence localement géodésique*. Dans un tel système, le tenseur métrique fondamental au voisinage infinitésimal d'un point donné, est

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial \tilde{x}^\rho \, \partial \tilde{x}^\sigma}\right)(\tilde{x}^\rho - x^\rho)\,(\tilde{x}^\sigma - x^\sigma) + \dots \ , \qquad (1.204)$$

c'est-à-dire que les valeurs numériques de ses composantes dans le voisinage d'un point diffèrent de celles du voisinage ponctuel initial, seulement par les termes du deuxième ordre des autres termes d'ordre supérieur qui eux, peuvent être négligés. Par conséquent, en tout point d'un système de référence localement géodésique, le tenseur métrique fondamental est considéré constant (aux termes du deuxième ordre près) alors que les dérivées premières de la métrique, ou les symboles de Christoffel, sont nuls [2–4].

Manifestement, un système de référence localement géodésique peut exister au voisinage d'un point dans un espace de Riemann. Il en résulte qu'à chaque point appartenant au système de référence localement géodésique, peut être attaché un espace plan tangent, de façon à ce que le système de référence localement géodésique de l'espace riemannien, deviennent le système de référence globalement géodésique de l'espace tangent. Etant donné que le tenseur métrique d'un espace plan est constant au voisinage d'un point de l'espace riemannien, les quantités $\tilde{g}_{\mu\nu}$ convergent vers celles du tenseur $g_{\mu\nu}$ dans l'espace plan tangent. C'est dire encore que dans cet espace tangent, on peut établir un système de vecteurs repère $\vec{e}_{(\alpha)}$, tangents aux coordonnées curvilinéaires de l'espace riemannien. Puisque les coordonnées d'un espace de Riemann sont courbes (en général), et dans le cas d'un espace non holonome elles ne sont même pas orthogonales entre elles, les longueurs des vecteurs repère peuvent varier notablement de l'unité.

Considérons le vecteur d'Univers dr de déplacement infinitésimal, $d\vec{r} = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$. Alors $d\vec{r} = \vec{e}_{(\alpha)} dx^\alpha$, où les composantes sont

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_{(0)} &= (e^0_{(0)}, 0, 0, 0), \qquad & \vec{e}_{(1)} &= (0, e^1_{(1)}, 0, 0) \\ \vec{e}_{(2)} &= (0, 0, e^2_{(2)}, 0), \qquad & \vec{e}_{(3)} &= (0, 0, 0, e^3_{(3)}) \end{aligned}\right\}. \tag{1.205}$$

Le produit scalaire du vecteur $d\vec{r}$ par lui-même donne $d\vec{r}d\vec{r} = ds^2$. Par ailleurs, $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$. D'où la formule

$$g_{\alpha\beta} = \vec{e}_{(\alpha)}\vec{e}_{(\beta)} = e_{(\alpha)} e_{(\beta)} \cos(x^\alpha; x^\beta), \tag{1.206}$$

qui facilite une meilleure compréhension de la structure géométrique de différentes régions de l'espace riemannien et au delà. D'après (1.206),

$$g_{00} = e^2_{(0)}, \tag{1.207}$$

tandis que $\sqrt{g_{00}} = 1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}$. Par suite, la longueur du vecteur repère temporel $\vec{e}_{(0)}$ (tangent à la ligne de temps $x^0 = ct$) est

$$e_{(0)} = \sqrt{g_{00}} = 1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}, \tag{1.208}$$

et donc plus celui-ci est inférieur à 1, plus le potentiel gravitationnel w est intense. Dans la situation d'un collapse gravitationnel ($\mathrm{w}=c^2$), la longueur du vecteur temporel $\vec{e}_{(0)}$, s'annule.

D'après (1.206), la quantité g_{0i} est

$$g_{0i} = e_{(0)} e_{(i)} \cos\left(x^0; x^i\right), \tag{1.209}$$

par ailleurs $g_{0i} = -\frac{1}{c}\, v_i \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) = -\frac{1}{c}\, v_i\, e_{(0)}$. D'où

$$v_i = -\, c\, e_{(i)} \cos\left(x^0; x^i\right). \tag{1.210}$$

Donc d'après la formule générale (1.206),

$$g_{ik} = e_{(i)} e_{(k)} \cos\left(x^i; x^k\right), \tag{1.211}$$

on obtient le tenseur métrique chr.inv. $h_{ik} = -\, g_{ik} + \frac{1}{c^2}\, v_i v_k$ sous la forme

$$h_{ik} = e_{(i)} e_{(k)} \Big[\cos\left(x^0; x^i\right) \cos\left(x^0; x^k\right) - \cos\left(x^i; x^k\right) \Big]. \tag{1.212}$$

A partir de (1.210) on voit que du point de vue géométrique, v_i est la projection (produit scalaire) du vecteur repère spatial $\vec{e}_{(i)}$ sur le vecteur repère temporel $\vec{e}_{(0)}$, multiplié par la vitesse de la lumière. Si les sections spatiales sont partout orthogonales aux lignes de temps (espace holonome), $\cos\left(x^0; x^i\right) = 0$ et $v_i = 0$. Dans un espace non holonome, les sections spatiales ne sont plus orthogonales aux lignes de temps, et donc $\cos\left(x^0; x^i\right) \neq 0$. D'une façon générale, $\left|\cos\left(x^0; x^i\right)\right| \leqslant 1$, de sorte que la vitesse linéaire de rotation d'espace v_i (1.210) ne peut excéder la vitesse de la lumière.

Si $\cos\left(x^0; x^i\right) = \pm 1$, la vitesse de rotation d'espace est

$$v_i = \mp\, c e_{(i)}\,, \tag{1.213}$$

et le vecteur repère temporel $\vec{e}_{(0)}$ coïncide avec les vecteurs repère spatiaux $\vec{e}_{(i)}$ (le temps "tombe" sur l'espace). Pour $\cos\left(x^0; x^i\right) = +1$, le vecteur repère temporel est collinéaire et co-orienté aux vecteurs repère spatiaux $\vec{e}_{(0)} \uparrow\uparrow \vec{e}_{(i)}$. Dans le cas où $\cos\left(x^0; x^i\right) = -1$, les vecteurs repère temporel et spatiaux sont directement opposés $\vec{e}_{(0)} \uparrow\downarrow \vec{e}_{(i)}$.

Analysons maintenant la condition $\cos\left(x^0; x^i\right) = \pm 1$. Si tout vecteur repère spatial est collinéaire et co-orienté (ou opposé) au vecteur repère temporel $\vec{e}_{(0)}$, l'espace est dégénéré. Le maximum de dégénérescence est atteint lorsque les trois vecteurs $\vec{e}_{(i)}$ coïncident entre $\vec{e}_{(x)}$ et avec le vecteur repère temporel $\vec{e}_{(0)}$.

La condition finale de la coordonnée temporelle $v_i \mathrm{v}^i = \pm c^2$ exprimée

à l'aide des vecteurs repère est

$$e_{(i)}\,\mathrm{v}^i \cos\left(x^0; x^i\right) = \mp c \tag{1.214}$$

et se vérifie quand $e_{(i)} = 1$, $\mathrm{v} = c$, et $\cos\left(x^0; x^i\right) = \pm 1$. Dans ce dernier cas, dès que la vitesse linéaire de rotation d'espace atteint la vitesse de la lumière, l'angle entre la ligne de temps et les ligne spatiales devient soit zéro ou π, suivant la direction de la rotation d'espace.

Illustrons ces situations à l'aide de quelques exemples :

L'ESPACE N'ENTRE PAS EN ROTATION (EST HOLONOME) : Dans ce cas, $v_i = 0$, de sorte que les section spatiales sont partout orthogonales aux lignes de temps et l'angle formé est $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent, en l'absence de rotation d'espace, le vecteur repère temporel $\vec{e}_{(0)}$ est orthogonal à tous les vecteurs repère spatiaux $\vec{e}_{(i)}$.

Il s'ensuit que toutes les horloges peuvent être synchronisées et indiquent le même temps (la synchronisation des horloges en différents points de l'espace est indépendante du chemin suivi). La vitesse linéaire de rotation d'espace est $v_i = -c\, e_{(i)} \cos\alpha = 0$. Pour $v_i = 0$, on a

$$d\tau = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) c\,dt\,, \qquad\qquad h_{ik} = -\,g_{ik}\,, \tag{1.215}$$

et la métrique d'espace-temps $ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2$ devient

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 + g_{ik}\, dx^i dx^k, \tag{1.216}$$

c'est-à-dire que le temps physiquement observable ne dépend que du potentiel gravitationnel w. Deux options sont alors ici possibles :

a) La force d'inertie gravitationnelle est $F_i = 0$ et la vitesse linéaire de rotation d'espace est $v_i = 0$. Dans ce cas, d'après les définitions de F_i et v_i, on obtient $\sqrt{g_{00}} = 1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2} = 1$ et $g_{0i} = -\frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\, v_i = 0$. L'annulation du potentiel de gravitation w signifie qu'il est indépendant des coordonnées tridimensionnelles (distribution homogène du champ gravitationnel). Le mouvement d'un observateur à travers l'espace ne modifie pas la marche des horloges (la synchronisation globale des horloges demeure inchangée dans le temps) ;

b) Dès que $F_i \neq 0$ et $v_i = 0$, on a pour la dérivée $\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial x^i} \neq 0$ dans la formule pour F_i (1.33). Le potentiel de gravitation w dépend des coordonnées tridimensionnelles, autrement dit la marche des horloges va varier en différents points de l'espace. Par suite, pour $F_i \neq 0$, la synchronisation des horloges en différents points d'un espace holonome (dépourvu de rotation) est impossible.

Dans un espace holonome (sans rotation), un effondrement gravitationnel peut avoir lieu ($\mathrm{w} = c^2$) seulement si $F_i \neq 0$. Si par contre $F_i = 0$ dans un espace holonome, on a $\mathrm{w} = 0$, selon la définition de F_i (1.33), et l'effondrement gravitationnel n'est pas possible.

L'espace entre en rotation a la vitesse subluminique : Dans ce cas, les sections spatiales ne sont pas orthogonales aux lignes de temps $v_i = -c\, e_{(i)} \cos\alpha \neq 0$. Du fait que $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant +1$, on a $-c \leqslant v_i \leqslant +c$. D'où $v_i > 0$ pour $\cos\alpha > 0$, et aussi $v_i < 0$ pour $\cos\alpha < 0$.

L'espace entre en rotation a la vitesse subluminique (1er cas) : Plus α est petit, plus grand est v_i. Dans le cas limite où $\alpha = 0$, la vitesse linéaire de rotation d'espace est $v_i = -c$. Les vecteurs repère spatiaux $\vec{e}_{(i)}$ coïncident avec le vecteur repère temporel $\vec{e}_{(0)}$ (l'espace coïncide avec le temps).

L'espace entre en rotation a la vitesse luminique (2ème cas) : Si $\alpha = \pi$, $v_i = +c$, et le vecteur repère temporel $\vec{e}_{(0)}$ coïncide également avec les vecteurs repère spatiaux $\vec{e}_{(i)}$, mais leur est directement opposé. Ce cas de figure peut être considéré comme coïncidant avec l'espace dont le temps s'écoule du futur dans le passé.

§1.15 Qui est l'observateur supraluminique ?

On peut mettre en exergue quelques types de référentiels qui existent en relativité générale. Les particules incluant un observateur se déplaçant à une vitesse subluminique (à "l'intérieur" du cône de lumière) et qui sont dotées de masse relativiste. Autrement dit, de telles particules, corps de référence, et observateur, sont dans un état de matière communément désigné sous le nom de de "substance". Par suite, tout observateur dont le référentiel est subluminique sera appelé *observateur subluminique* ou *observateur substantiel*.

Les particules et un observateur se déplaçant à la vitesse de la lumière (à la surface d'un cône de lumière) sont caractérisés par $m_0 = 0$, mais leurs masses relativistes (masses dynamiques) sont elles, caractérisées par $m \neq 0$. Ce sont les états du genre lumière de la matière. Nous appellerons donc un observateur dont le référentiel est caractérisé par un tel état, un *observateur du genre lumière*.

Corrélativement, les particules et un observateur se déplaçant à une vitesse supraluminique seront respectivement appelés *particules supraluminiques* et *observateur supraluminique*. Ces derniers sont dans un état de matière où $m_0 \neq 0$, tandis que leurs masses relativistes sont imaginaires.

Intuitivement, la définition de l'observateur subluminique est claire. Pour un observateur du genre lumière, notre perception est plus ou moins la même. Du point de vue d'un observateur du genre lumière, l'Univers environnant apparaît comme un système coloré par des ondes lumineuses. Mais comment peut on alors définir un observateur supraluminique ? Pour tenter de comprendre, il peut être commode de prendre l'exemple suivant.

Imaginons un avion assujetti à effectuer des accélérations. Les occupants sont ici envisagés comme ne pouvant rien voir. Toutes les informations du monde extérieur, leur parviennent à travers des ondes sonores propagées par l'air ambiant, qui de fait, constituent leur seul perception du "monde réel".

L'avion décolle et commence à accélérer. Tant que sa vitesse est inférieure à celle du son, l'équipage et le pilote sont en mesure de relier leur position dans le ciel "qu'ils entendent", avec celle que nous pouvons voir. Mais dès que la barrière du son est franchie, tout change. L'équipage continue à percevoir la vitesse de l'avion comme étant égale à la vitesse du son, quelque soit sa vitesse réelle. Pour eux, la vitesse de propagation des ondes sonores dans l'air est la *vitesse ultime de propagation des informations*, alors qu'en fait l'avion supersonique est au delà de leur "monde réel" et se situe dans l'Univers des "objets imaginaires" et de leur point de vue, toutes leurs propriétés demeurent imaginaires. Le pilote non voyant n'entendra rien par lui-même. Aucun son ne l'atteindra en provenance de la réalité écoulée, et seuls quelques bruits locaux du cockpit (qui est en régime supersonique), viendra rompre le silence. Dès que la vitesse du son est dépassée, le pilote quitte donc le monde subsonique pour un nouveau régime supersonique. Par rapport à son nouveau référentiel (le système de référence supersonique), l'ancien monde subsonique fixe de l'aéroport y compris son propre équipage, va disparaître, faisant partie d'une région de "quantités imaginaires".

Qu'est ce que la lumière ? Des ondes transversales qui se propagent à travers un certain milieu à vitesse constante. Nous percevons le monde environnant au moyen de la vue en recevant des ondes lumineuses à partir d'autres objets. Ce sont ces ondes lumineuses qui constituent notre vision de "l'Univers réel".

Imaginons à présent un vaisseau spatial qui accélère régulièrement jusqu'à dépasser la barrière luminique à une vitesse de plus en plus rapide. D'un point de vue mathématique le processus est plausible dans l'espace-temps de la relativité générale. Pour nous, la vitesse de la lumière est la vitesse ultime de propagation des signaux d'informations, alors que le vaisseau spatial réel va se déplacer dans un autre monde

"irréel" de vitesses supraluminiques où toutes les propriétés sont imaginaires. Le même point de vue s'applique au pilote qui franchit la barrière de la lumière, et accède à un autre monde supraluminique qui devient ainsi sa "vraie réalité", tandis que l'ancien monde des vitesses supraluminiques a disparu dans la région de la "réalité imaginaire".

§1.16 Effondrement gravitationnel en différentes régions d'espace

Nous appellerons *collapsar gravitationnel*, une région de l'espace-temps dans laquelle la condition de l'effondrement gravitationnel $g_{00}=0$ est partout vérifiée. D'après la théorie des invariants chronométriques $\sqrt{g_{00}}=1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}$. Par suite, la condition de collapse gravitationnel $g_{00}=0$ signifie également $\mathrm{w}=c^2$. Nous examinerons cette région effondrée du point de vue d'un observateur distant à l'extérieur de cette région.

Ecrivons l'expression développée de l'intervalle quadridimensionnel de telle façon qu'il contienne un rapport explicite entre w et c^2, à savoir

$$ds^2=\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2dt^2-2\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)v_i\,dx^i\,dt+g_{ik}\,dx^i\,dx^k. \qquad (1.217)$$

Faisons maintenant $\mathrm{w}=c^2$ dans cette expression, et nous obtenons la métrique spatio-temporelle à la surface d'un collapsar gravitationnel

$$ds^2=g_{ik}\,dx^i\,dx^k. \qquad (1.218)$$

On voit donc que le collapse gravitationnel dans l'espace-temps quadridimensionnel ne peut être correctement déterminé que si l'espace-temps est holonome, c'est-à-dire que l'espace tridimensionnel de l'observateur est dépourvu de rotation (sa section spatiale est partout orthogonale aux lignes de temps).

Etant donné qu'en l'absence de rotation d'espace, l'intervalle du temps physiquement observable est $d\tau=\sqrt{g_{00}}\,dt=\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)dt$, à la surface d'un collapsar, le temps observable s'arrête ($d\tau=0$). En réalité, quand le dénominateur de la vitesse linéaire de rotation d'espace

$$v_i=-\,c\,\frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}=-\,c\,\frac{g_{0i}}{1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}} \qquad (1.219)$$

tend vers zéro pour le cas du collapse ($\mathrm{w}=c^2$), v_i devient infini. Pour éviter cette difficulté, nous supposerons $g_{0i}=0$. La métrique (1.217) prend alors la forme

$$ds^2=\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2dt^2+g_{ik}\,dx^i\,dx^k, \qquad (1.220)$$

et toute ambiguïté sur l'état de l'espace-temps est ainsi levée. Procédant de cette manière, on trouve la métrique à la surface d'un collapsar gravitationnel (1.218)

$$ds^2 = -\,d\sigma^2 = -\,h_{ik}\,dx^i dx^k, \qquad h_{ik} = -\,g_{ik}\,. \tag{1.221}$$

Il apparaît clairement que l'intervalle quadridimensionnel à la surface d'un collapsar gravitationnel est du genre espace : la distance élémentaire entre deux points à la surface du collapsar gravitationnel est imaginaire

$$ds = i\,d\sigma = i\sqrt{h_{ik}\,dx^i dx^k}\,. \tag{1.222}$$

Si $ds = 0$, la distance tridimensionnelle observable $d\sigma$ entre deux points de la surface de ce collapsar s'annule également.

Nous nous proposons maintenant d'examiner les collapses gravitationnels pour différentes régions de l'espace-temps quadridmensionnel.

COLLAPSE DANS UNE REGION SUBLIMUNIQUE : Dans cette région, $ds^2 > 0$. C'est le domaine des particules classiques réelles qui se déplacent aux vitesses subluminiques. Par conséquent un collapsar gravitationnel dans cette région est rempli de substance effondrée (*collapsar substantiel*). A la surface d'un tel collapsar, la métrique est du genre espace : ici $ds^2 < 0$, et toutes ses particules sont dotées de masses relativistes imaginaires. La métrique à la surface de ce collapse gravitationnel est bien entendu non dégénérée.

COLLAPSE DANS UNE REGION DU GENRE LUMIÈRE : Dans cette région $ds^2 = 0$. C'est un espace isotrope de particules du genre lumière (sans masse). Un collapsar gravitationnel à l'intérieur de cette région est rempli de matière du genre lumière (collapsar du genre lumière). La métrique (1.221) à sa surface est $d\sigma^2 = -\,g_{ik}\,dx^i dx^k = 0$. Cette dernière est vérifiée à condition que :

a) La surface du collapsar se réduise à un point (c'est-à-dire que tous les $dx^i = 0$) ;

b) La métrique tridimensionnelle soit dégénérée ($\det \| g_{ik} \| = 0$). Etant donné que la métrique quadridimensionnelle est également dégénérée, le collapsar du genre lumière se résout dans ce cas à un zéro-espace.

COLLAPSE DANS UNE REGION DÉGÉNÉRÉ (ZÉRO-ESPACE) : Il est évident que dans une région d'espace-temps complètement dégénérée, la matière peut également s'effondrer. Nous désignerons ces effondrements

sous le nom de *collapsars dégénérés*. En fait, à partir de la condition de dégénérescence

$$\mathrm{w} + v_i u^i = c^2, \qquad g_{ik}\, dx^i dx^k = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2, \tag{1.223}$$

on voit que dans le cas du collapse ($\mathrm{w} = c^2$), il vient

$$v_i u^i = 0\,, \qquad g_{ik}\, dx^i dx^k = 0\,. \tag{1.224}$$

Par suite, un effondrement gravitationnel à l'intérieur du zéro-espace se produit également en l'absence de rotation ($v_i = 0$), et les conditions (1.224) impliquent donc que la surface du collapsar dégénéré se réduise à un point.

Chapitre 2

Mouvement des particules résultant du mouvement intrinsèque de l'espace

§2.1 Propos préliminaire

Substituant le potentiel gravitationnel w et la vitesse linéaire de rotation d'espace v_i dans la définition de l'intervalle de temps physiquement observable $d\tau$ (1.21), on obtient cette dernière sous la forme

$$\left(1 + \frac{1}{c^2}\, v_i \mathrm{v}^i\right) d\tau = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) dt\,. \tag{2.1}$$

On voit immédiatement que la différence fondamentale entre $d\tau$ et dt résulte soit d'un champ gravitationnel intense, soit de vitesses proches de la lumière. Clairement, cette différence n'est pas vraiment significative dans notre vie quotidienne.

Le temps physiquement observable coïncide avec la coordonnée temporelle $dt = d\tau$ seulement si

$$\mathrm{w} = -\, v_i \mathrm{v}^i. \tag{2.2}$$

En réalité, une telle condition signifie que l'attraction gravitationnelle d'une particule par le corps de référence de l'observateur, est entièrement compensée par la rotation de l'espace du corps de référence (l'espace de référence) et le mouvement de la particule elle-même. C'est dire encore que (2.2) est la formulation mathématique de la condition *d'apesanteur*. En insérant le potentiel de gravitation dans la formule de Newton, on obtient

$$\frac{GM}{r} = v_i \mathrm{v}^i. \tag{2.3}$$

Si la vitesse orbitale de la particule est égale à la vitesse linéaire de rotation du corps gravitant, la condition sans masse de la particule prend la forme

$$\frac{GM}{r} = v^2, \tag{2.4}$$

c'est-à-dire que plus la distance de l'orbite est éloignée de la particule attractive, plus lente est la vitesse d'un satellite orbitant.

Cette affirmation est-elle corroborée par des données expérimenta-

Planète	Vitesse orbitale, km/sec	
	Mesurée	Calculée
Mercure	47.9	47.9
Vénus	35.0	35.0
Terre	29.8	29.8
Mars	24.1	24.1
Jupiter	13.1	13.1
Saturne	9.6	9.6
Uranus	6.8	6.8
Neptune	5.4	5.4
Pluton	4.7	4.7
Lune	1.0	1.0

les ? La table ci-dessus donne les vitesses orbitales de la Lune et des planètes mesurées astronomiquement et celles calculées à partir de la condition sans masse.

On voit bien que la condition d'apesanteur. S'applique très exactement quelque soit le satellite du corps orbitant. Notons que cette condition est vérifiée si la vitesse orbitale d'une planète est égale (ou très proche) à la vitesse linéaire de rotation de l'espace du corps gravitant sur cette orbite (2.4). Autrement dit, l'espace en rotation du corps gravitant *emporte* tous les corps environnants, qui produit ainsi leur rotation.

Si l'espace du corps gravitant entrait en rotation comme un corps solide, c'est-à-dire sans déformation, sa vitesse angulaire serait constante ($\omega = const$), pendant que la vitesse orbitale $\mathrm{v} = \omega r$ des satellites qui l'accompagne, augmenterait avec le rayon de leurs orbites. Cependant, à partir de l'exemple des planètes du système solaire, on a vu que la vitesse linéaire de rotation orbitale décroît avec la distance au Soleil. Cela signifie clairement qu'en réalité, l'espace du corps gravitant (espace de référence) n'entre pas en rotation comme un corps solide, mais plutôt comme un liquide visqueux déformable dans lequel la rotation des couches distantes du centre est différente de celles plus proches de ce dernier. Par suite, l'espace du corps gravitant est pourvu d'une *torsion*, et le profil des vitesses orbitales reflète alors simplement la structure de cet espace tordu.

Nous voyons donc que le mouvement orbital des particules dans un champ de gravitation résulte de la *rotation de l'espace du corps attractif lui-même*.

§2.2 Position du problème

Quelles peuvent être alors les conséquences de la théorie mathématique que nous venons d'esquisser ? C'est ce que nous nous proposons de voir dans la suite.

Envisageons un espace métrique. Le mouvement propre de l'espace nous permet manifestement de relier un point quelconque de celui-ci, avec le vecteur Q^α du mouvement en ce point. Il est également évident que tous les points de l'espace vont subir le même mouvement que l'espace lui-même. Q^α peut être alors considéré comme le vecteur du mouvement de l'espace lui-même (au point donné). Il en découle que nous obtenons un champ de vecteurs qui décrit le mouvement global de l'espace.

Bien entendu, si la longueur du vecteur Q^α demeure constante au cours du mouvement, un tel espace se meut de façon à ce que sa métrique reste également inchangée. Par conséquent, si le vecteur du mouvement Q^α de cet espace, est fixé en un certain point, la métrique de l'espace peut être déterminée en partant du mouvement de ce point (et du mouvement de l'espace).

Il faut remonter à la fin du 19ème siècle, où Sophus Lie [16] put fournir un des moyens de résoudre ce problème. Il parvint ainsi à obtenir les équations portant sur les dérivées extérieures du tenseur métrique fondamental $g_{\alpha\beta}$ de l'espace, par rapport à la trajectoire du mouvement du vecteur Q^α, où les composantes de Q^α sont présentes en tant que coefficients fixés. Le nombre de ces équation est égal aux nombre de composantes du tenseur métrique. Par suite, le vecteur Q^α étant fixé, c'est-à-dire que le mouvement de l'espace étant donné, on peut résoudre les équations pour trouver les composantes du tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ en partant des composantes de Q^α. Plus tard, il fût suggéré par Van Danzig de désigner une telle dérivée de la métrique sous le nom de *dérivée de Lie*.

Proposons nous maintenant d'analyser le cas particulier du mouvement d'espace qui laisse la métrique invariante. Ce cas a été étudié par Walter Killing [17]. Ce type de mouvement revient naturellement à annuler la dérivée de Lie (*Equations de Killing*). Si le mouvement d'un espace laisse sa métrique invariante et si nous connaissons le vecteur Q^α pour n'importe lequel de ses points (le mouvement de cet espace étant fixe en ce point), le mouvement de ce(s) point(s) peut être utilisé pour déduire la métrique de l'espace à partir des équations de Killing.

On sait par ailleurs que le mouvement des particules est décrit par des équations dynamiques. Ces dernières laissent elles, la métrique de

l'espace inchangée, et le problème est ici de trouver le vecteur dynamique Q^α de la particule. La métrique fixée dans les équations du mouvement transforme les symboles de Christoffel qui sont fonctions des composantes du tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$, en coefficients fixés. De la sorte, dès qu'une métrique particulière d'un espace est donnée, on peut utiliser les équations du mouvement afin d'obtenir le vecteur Q^α pour la particule dans cet espace.

Nous parvenons donc au résultat suivant. Puisque $g_{\alpha\beta}$ est un tenseur symétrique, $(g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha})$, seules 10 de ses composantes sur 16, ont des valeurs numériques distinctes. Dans les équations de Killing, (10 équations), le vecteur dynamique d'un point de l'espace est fixé, tandis que les composantes du tenseur métrique ne sont pas déterminées (10 inconnues). Les équations du mouvement d'une particule libre (4 équations) laissent au contraire, la métrique fixée, mais les composantes du vecteur dynamique de la particule (4 composantes) sont inconnues. Par conséquent dès lors que nous assimilons le mouvement libre d'une particule au mouvement d'un point quelconque de l'espace entraîné lui-même par le mouvement de ce dernier, il est possible d'avoir un système de 10 équations de Killing (les équations du mouvement de l'espace) ainsi qu'un système de 4 équations du mouvement de la particule. Le système de 14 équations aura ainsi 14 inconnues dont 10 seront des composantes inconnues de la métrique, et 4 des composantes du vecteur dynamique de la particule. Par suite, en résolvant ce système, nous obtiendrons le mouvement de la particule dans l'espace ainsi que sa métrique.

En particulier, en résolvant ces systèmes d'équations, on pourra déduire les mouvements des particules qui résultent du mouvement propre de l'espace. Manifestement, la connaissance de ce genre de mouvement appliqué à un certain type de particule, peut conduire à produire la métrique elle-même.

Par exemple, en résolvant les équations de Killing et les équations dynamiques du mouvement d'un satellite ou d'une planète, on peut déterminer la métrique de l'espace du corps gravitant.

Au prochain paragraphe, nous nous proposons d'évaluer les équations de Killing sous forme chr.inv.

§2.3 Equations du mouvement et équations de Killing

Nous allons envisager un espace dynamique (pas nécessairement métrique). Le vecteur du mouvement Q^α d'un point quelconque de l'espace est le mouvement propre de l'espace en ce point. Le déplacement de la

métrique d'espace est décrit par la dérivée de Lie

$$\underset{\mathrm{L}}{\delta}\, g_{\alpha\beta} = Q^{\sigma}\,\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}} + g_{\alpha\sigma}\frac{\partial Q^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} + g_{\beta\sigma}\frac{\partial Q^{\sigma}}{\partial x^{\alpha}}\,, \tag{2.5}$$

qui est la dérivée du tenseur métrique fondamental de l'espace par rapport à la direction du transport parallèle du vecteur Q^{α} (direction du mouvement propre de l'espace).

Nous allons examiner à présent la situation dans le cadre suivant. Envisageons un point de l'espace. Si l'espace entre en mouvement, le point est soumis à l'action du vecteur Q^{α} qui est le vecteur dynamique de l'espace lui-même. Pour le point en question, l'espace est au repos, et "l'entraînement" de l'espace produit par son mouvement global, ne sera révélé que par le vecteur Q^{α}.

En général, la dérivée de Lie est différente de zéro. Autrement dit, le mouvement de l'espace perturbe sa métrique. Par définition,dans un espace de Riemann, la métrique est fixée, et la longueur d'un vecteur parallèlement transporté ne varie pas. Cette circonstance signifie que le transport parallèle d'un vecteur à travers une structure "irrégulière" de l'espace riemannien va perturber ce vecteur corrélativement à cette configuration de l'espace. Il en résulte que la dérivée de Lie de la métrique d'un espace riemannien, doit être nulle

$$\underset{\mathrm{L}}{\delta}\, g_{\alpha\beta} = 0\,. \tag{2.6}$$

Ainsi qu'il a été rappelé précédemment, les équations de Lie dans un espace riemannien ont été d'abord étudiées par Killing, d'où leur désignation d'équations de Killing. Plus tard, Petrov [18] montra que pour un point quelconque, les équations de Killing constituent la condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement de ce point soit celui de l'espace riemannien lui-même. En d'autres termes, si un point est entraîné par le mouvement d'un espace riemannien en se déplaçant avec lui, alors, les équations de Killing doivent être vérifiées par ce point.

Afin d'obtenir les composantes du tenseur métrique à partir des équations de Killing, il est donc nécessaire de faire appel à un vecteur particulier Q^{α} du mouvement d'un point. Par suite, nous aurons 10 équations de Killing en face de 10 composantes inconnues du tenseur métrique, et donc nous pourrons résoudre le système.

En général, il peut exister plusieurs types de mouvements dans un espace riemannien. Nous fixerons le vecteur dynamique Q^{α} de telle façon qu'il soit en adéquation avec les exigences de notre problème.

On sait qu'il existe des mouvements libres (géodésiques) qui carac-

térisent le déplacement d'un point le long d'une trajectoire géodésique (trajectoire la plus courte parmi toutes celles séparant deux points). Nous supposerons que chaque point de l'espace riemannien entraîné par celui-ci, se déplace de manière géodésique. De la sorte, le déplacement global de l'espace riemannien sera également géodésique. Nous pourrons donc faire correspondre le mouvement d'un point entraîné par l'espace, avec le mouvement de la particule libre elle-même.

Nous appellerons *mouvement géodésique d'un espace*, le mouvement libre de particules entraînées par l'espace en mouvement.

Examinons le système suivant formé par les équations dynamiques du mouvement des particules libres et les équations de Killing

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{D}Q^\alpha}{d\rho} = 0 \\ &\underset{\mathrm{L}}{\delta}\, g_{\alpha\beta} = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{2.7}$$

où Q^α représente le vecteur dynamique du mouvement de la particule, et ρ représente le paramètre de dérivation le long de la trajectoire du mouvement, tandis que la dérivée de Lie peut elle, s'exprimer au moyen de la *différentielle de Lie*

$$\underset{\mathrm{L}}{\delta}\, g_{\alpha\beta} = \frac{\underset{\mathrm{L}}{\mathrm{D}}\, g_{\alpha\beta}}{d\rho}\,. \tag{2.8}$$

Le système (2.7) montre que le mouvement d'une particule libre est celui d'une géodésique, et que cette particule est en même temps entraînée par le mouvement de l'espace. Ce système se résout en tant qu'ensemble des composantes du vecteur dynamique Q^α, ainsi que des composantes du tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$ pour lesquelles le mouvement géodésique des particules résulte du mouvement géodésique de l'espace lui-même.

Les grandeurs physiquement observables produites à partir des équations de Killing, doivent être les projections chr.inv. de ces équations sur les lignes de temps (1 composante), la projection mixte (3 composantes), et les projections spatiales (6 composantes)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\underset{\mathrm{L}}{\delta}\, g_{00}}{g_{00}} = 0 \\ &\frac{\underset{\mathrm{L}}{\delta}\, g_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{g^{i\alpha}\,\underset{\mathrm{L}}{\delta}\, g_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} = 0 \\ &\underset{\mathrm{L}}{\delta}\, g^{ik} = g^{i\alpha} g^{k\beta}\,\underset{\mathrm{L}}{\delta}\, g_{\alpha\beta} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{2.9}$$

Ici, nous mesurons le mouvement de l'espace et des particules du point de vue d'un observateur subluminique classique.

Ayant présenté les dérivées de Lie de la métrique en fonction des opérateurs chr.inv., et en remplaçant la notation du vecteur dynamique Q^α par $\varphi = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}}$ et $q^i = Q^i$, on trouve les *équations de Killing chr.inv.*

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{c} F_i q^i = 0 \\
&\frac{1}{c}\frac{{}^*\partial q^i}{\partial t} - h^{im}\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m} - \frac{\varphi}{c^2} F^i + \frac{2}{c} A_{k\cdot}^{\cdot i} q^k = 0 \\
&\frac{2\varphi}{c} D^{ik} + h^{im} h^{kn} q^l \frac{{}^*\partial h_{mn}}{\partial x^l} + h^{im}\frac{{}^*\partial q^k}{\partial x^m} + h^{km}\frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^m} = 0
\end{aligned}\right\} . \tag{2.10}$$

Si le vecteur Q^α obéit simultanément aux équations de Killing chr.inv., et aux équations dynamiques chr.inv. du mouvement de la particule, cette dernière est dite en mouvement, c'est-à-dire qu'elle est entraînée par le déplacement géodésique de l'espace.

La solution commune des équations sous forme générale, est problématique, et nous nous limiterons donc à un cas particulier unique, dont l'importance reste majeure. Considérons le vecteur dynamique Q^α du mouvement de l'espace, comme étant le vecteur dynamique du mouvement d'une particule massive

$$Q^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{m}{c}\frac{dx^\alpha}{d\tau} , \tag{2.11}$$

qui est liée à l'observateur ($\mathrm{v}^i = 0$). Dans ce cas,

$$\varphi = m_0 = const, \qquad q^i = \frac{m}{c}\,\mathrm{v}^i, \tag{2.12}$$

et les équations de Killing chr.inv. (2.10) se simplifient

$$\left.\begin{aligned} F^i &= 0 \\ D^{ik} &= 0 \end{aligned}\right\} . \tag{2.13}$$

D'après (1.42), $D^{ik} = 0$ implique que la métrique observable soit stationnaire $h^{ik} = const$. La condition $F^i = 0$ est exigée pour que les égalités suivantes soient vraies uniquement par transformation de la coordonnée temporelle

$$g_{00} = 1 , \qquad \frac{\partial g_{0i}}{\partial t} = 0 . \tag{2.14}$$

Par ailleurs, les quantités F^i et A_{ik} sont reliées par les identités de Zelmanov (voir form. 1.37, §1.2)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial F_k}{\partial x^i} - \frac{{}^*\partial F_i}{\partial x^k}\right) + \frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial t} = 0\,, \tag{2.15}$$

à partir desquelles, on voit que $F^i = 0$, implique également

$$\frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial t} = 0\,, \tag{2.16}$$

de sorte que dans ce cas, le mouvement de l'espace est en *rotation stationnaire*.

De plus, ainsi qu'on peut le voir d'après les équations de Killing (2.13), le tenseur de déformation d'espace est nul, et donc, la rotation stationnaire n'influence pas la structure de l'espace. La disparition de la force d'inertie gravitationnelle dans les équations de Killing, signifie que du point de vue d'un observateur lié à une particule entraînée par l'espace ($\mathrm{v}^i = 0$), cette dernière ne pèse rien, et n'est jamais attirée par quoi que ce soit (état d'apesanteur). Cette situation ne contredit nullement la condition d'apesanteur $\mathrm{w} = -v_i \mathrm{v}^i$ définie plus haut, car du point de vue de cet observateur,le potentiel de gravitation du corps de référence satisfait $\mathrm{w} = 0$, ainsi que $F^i = 0$.

Donc, si Q^α est le vecteur du mouvement d'une particule massive dans l'espace riemannien, le mouvement géodésique de l'espace le long de ce vecteur est en rotation stationnaire. Le mouvement géodésique d'une particule massive est donc en rotation stationnaire.

Un tel mouvement de rotation est dû à l'entraînement du corps gravitant (corps de référence) par l'espace de référence qui l'environne. Dans le même temps, on sait que le type de mouvement fondamental de l'Univers est le mouvement orbital. Il s'en suit que le mouvement de base de l'Univers est de nature géodésique en raison de l'entraînement des objets par la rotation stationnaire (géodésique) des espaces rattachés aux corps gravitants.

§2.4 Conclusions

Un espace renfermant un potentiel de gravitation, déformable, et en rotation se comporterait-il alors comme un milieu visqueux ? Il est intéressant de noter que si l'on place une particule dans l'espace, son mouvement va l'emporter à la manière d'un courant océanique entraînant un bateau minuscule et un iceberg géant.

On peut apporter la réponse suivante : d'après nos résultats, l'espace

de référence du corps et son champ gravitationnel sont une seule et même entité. Physiquement parlant, les points de l'espace de référence peuvent être considérés comme des particules situées dans le champ de gravitation du corps de référence.

Si l'espace de référence n'entre pas en rotation, un satellite devrait tomber sur le corps de référence, sous l'action du champ gravitationnel. Mais en présence de rotation d'espace, le satellite restera soumis à la force d'entraînement. Celle-ci agit à la manière d'un vent ou d'un courant océanique qui pousse continuellement le satellite vers l'avant, et l'empêche de tomber tout en le maintenant en orbite avec le corps gravitant et son espace en rotation (naturellement, le satellite pourra être plus rapide que la rotation d'espace, si une vitesse supplémentaire lui est communiquée).

Chapitre 3

Déviation des lignes d'Univers. Détection des ondes gravitationnelles

§3.1 Détecteurs d'ondes gravitationnelles

Ce chapitre est consacré à la théorie de la détection des ondes gravitationnelles que nous avons brièvement publié dans un article précédent [19]. Cette théorie a également été présentée en 2008 à l'American Physical Society, lors d'une réunion tenue du 12 au 15 Avril 2008 à St. Louis, Missouri [20]. En ce qui concerne la théorie générale des ondes de gravitation et de leurs critères, le lecteur peut se référer à la publication détaillée [21].

Considérons deux particules de masse au repos m_0, liées entre elles par une force Φ^α de nature non gravitationnelle. Ces particules se déplacent le long de lignes d'Univers voisines non géodésiques à la même vitesse quadridimensionnelle U^α, selon les équations non géodésiques du mouvement

$$\frac{dU^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \frac{\Phi^\alpha}{m_0 c^2}\,, \tag{3.1}$$

tandis que les déviations relatives des lignes d'Univers (particules d'épreuve) sont données par l'équation de Synge-Weber [22]

$$\frac{\mathrm{D}^2\eta^\alpha}{ds^2} + R^\alpha_{\cdot\beta\gamma\delta}\, U^\beta U^\delta \eta^\gamma = \frac{1}{m_0 c^2}\frac{\mathrm{D}\Phi^\alpha}{dv}\, dv\,, \tag{3.2}$$

où $\mathrm{D}\eta^\alpha = d\eta^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\eta^\mu dx^\nu$ est la différentielle absolue, $\eta^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial v}\, dv$ est le vecteur de la déviation relative des particules, et v est un paramètre ayant la même valeur numérique le long d'une ligne d'Univers, mais différente pour dv le long de lignes d'Univers voisines.

Lorsque deux particules voisines sont libres ($\Phi^\alpha = 0$), elles se déplacent le long de géodésiques également voisines, selon les équations géodésiques du mouvement

$$\frac{dU^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0\,, \tag{3.3}$$

tandis que les déviations relatives des géodésiques (particules d' épreuve) sont données par les équations de Synge [23]

$$\frac{\mathrm{D}^2\eta^\alpha}{ds^2} + R^\alpha_{\cdot\beta\gamma\delta}\, U^\beta U^\delta \eta^\gamma = 0\,. \tag{3.4}$$

Une onde gravitationnelle de la métrique d'espace qui déforme ce dernier, doit pouvoir produire un certain effet sur un système à deux particules. Cet effet peut être déduit en tant que solution des équations de déviation dans la métrique des ondes gravitationnelles. Par suite, deux types de détecteurs d'ondes de gravitation ont été imaginés en 1960, par Weber qui restera le pionnier en matière de recherches expérimentales sur la mise en évidence de ces ondes :

a) Détecteur de type solide (ou massif) — une cheville cylindrique librement suspendue, consistant en deux masses reliées par un ressort. Un tel dispositif est susceptible d'être déformé sous l'action d'une onde gravitationnelle. Après quoi, la détection est mesurée par effet piézo-électrique ;

b) Détecteur sans masse — un système consistant en deux miroirs également librement suspendus, séparés de façon visible, et équipés de capteurs de portées à laser. Toute déviation des miroirs qui pourrait être due à l'influence de l'onde gravitationnelle, est alors enregistrée au moyen du faisceau du laser.

§3.2 Un bref historique des expériences de mesures

L'intérêt initial portant sur les ondes de gravitation date des années 1968–1970, lorsque Joseph Weber, professeur à l'université du Maryland (USA), entreprit ses premières expériences à l'aide de détecteurs d'ondes gravitationnelles de type solide. Il pût enregistrer quelques signaux faibles, en parallèle avec des détecteurs indépendants, dont la distance séparant chacun d'eux, pouvait aller jusqu'à 1000 km [24–26].

Weber supposa alors que certains processus au centre de la galaxie étaient à l'origine des signaux mesurés. Plusieurs groupes de chercheurs on ensuite poursuivi les expérimentations pendant quelques décennies dans divers laboratoires et instituts à travers le monde. Au cours de ces essais, les dispositifs d'enregistrement s'étaient considérablement affinés. Dans les années 68, Weber utilisait en effet des systèmes rudimentaires aux températures ambiantes. Afin d'amplifier l'effet des mesures, le niveau de bruit de tous les détecteurs massifs de seconde génération, fût réduit en refroidissant les chevilles cylindriques à des températures proches de 0 K. En dehors des antennes détectrices gravitationnelles de type solide, on construisit par la suite, beaucoup d'antennes détectrices de type sans masse...

Malgré tout, cette seconde génération de détecteurs ne permit pas de mettre en évidence les effets escomptés identifiables aux résultats de Weber.

Il est néanmoins admis parmi les physiciens, que les ondes gravitationnelles existent, car elles sont une conséquence naturelle de la relativité générale. On peut lister les arguments essentiels en faveur de cette thèse [15] :

a) Les champs gravitationnels emportent de l'énergie qui est représentée par le pseudo-tenseur d'énergie-impulsion ;

b) Les équations linéarisées des équations d'Einstein permettent de déduire une solution décrivant des ondes gravitationnelles planes faibles en mode transversal ;

c) Au moyen du pseudo-tenseur, on peut calculer un flux d'énergie rayonné par les ondes gravitationnelles.

De ce fait, on peut raisonnablement espérer en la découverte prochaine des ondes gravitationnelles.

Le coeur du problème réside dans le fait que les conclusions de Weber relatives à la conception de ses détecteurs, ne reposaient pas sur une solution exacte des équations de déviation, mais sur une *analyse approximative* des résultats qu'on pouvait en attendre : Weber escomptait qu'une onde plane de faible intensité de la métrique d'espace (onde gravitationnelle), puisse déplacer deux particules au repos l'une par rapport à l'autre.

Ici, nous allons déduire les *solutions exactes* des deux équations de Synge et Synge-Weber (théorie exacte des détecteurs solides et sans masse). Contrairement aux suppositions de Weber, les équations exactes montrent que les ondes de gravitation ne peuvent déplacer les particules au repos ; quelques effets peuvent se produire seulement si les particules sont déjà en mouvement. En accord avec ces solutions exactes, on peut donc modifier la conception des deux détecteurs solide et sans masse, de façon qu'ils soient en mesure d'enregistrer des oscillations provoquées par les ondes gravitationnelles.

Weber les a vraisemblablement détecté vers 1968–1970, du fait que les extrémités de son détecteur à cylindre, oscillaient déjà en raison de la température ambiante, alors qu'elles se trouvaient automatiquement supprimées en même temps que le bruit des détecteurs améliorés ultérieurement par les chercheurs successifs, et qui n'ont de ce fait, enregistré aucun résultat positif pendant 35 ans.

§3.3 Analyse critique de l'approche de Weber

Weber envisage un déplacement relatif η^α des particules consistant en une distance constante r^α, et une variation infinitésimale ζ^α de celle-ci,

due à l'influence de l'onde gravitationnelle

$$\eta^\alpha = r^\alpha + \zeta^\alpha, \qquad \zeta^\alpha \ll r^\alpha, \qquad \frac{\mathrm{D}\, r^\alpha}{ds} = 0\,. \tag{3.5}$$

L'équation de déviation non géodésique, qui est l'équation de Synge-Weber (3.2), prend donc la forme particulière

$$\frac{\mathrm{D}^2 \zeta^\alpha}{ds^2} + R^\alpha_{\cdot\beta\gamma\delta}\, U^\beta U^\delta \left(r^\gamma + \zeta^\gamma\right) = \frac{\Phi^\alpha}{m_0 c^2}\,. \tag{3.6}$$

On considère alors Φ^α comme étant la somme de la force de rappel élastique $k^\alpha_\sigma \zeta^\sigma$ et du facteur d'amortissement $d^\alpha_\sigma \frac{\mathrm{D}\zeta^\sigma}{ds}$, où k^α_σ et d^α_σ caractérisent les propriétés du ressort. Il en résulte que l'équation (3.6) devient

$$\frac{\mathrm{D}^2 \zeta^\alpha}{ds^2} + \frac{d^\alpha_\sigma}{m_0 c^2} \frac{\mathrm{D}\zeta^\sigma}{ds} + \frac{k^\alpha_\sigma}{m_0 c^2} \zeta^\sigma = -\, R^\alpha_{\cdot\beta\gamma\delta}\, U^\beta U^\delta \left(r^\gamma + \zeta^\gamma\right) \tag{3.7}$$

c'est-à-dire que c'est l'équation des oscillations forcées où le tenseur de courbure $R^\alpha_{\cdot\beta\gamma\delta}$, apparaît comme un facteur de contrainte. Après quelques simplifications, Weber transforme l'équation de déviation non géodésique (3.7) selon

$$\frac{d^2 \zeta^\alpha}{dt^2} + \frac{d^\alpha_\sigma}{m_0} \frac{d\zeta^\sigma}{dt} + \frac{k^\alpha_\sigma}{m_0}\, \zeta^\sigma = -\, c^2 R^\alpha_{\cdot 0\sigma 0}\, r^\sigma. \tag{3.8}$$

Cependant, il ne résout pas cette dernière équation (3.8). Il se contente d'utiliser le tenseur de courbure en tant que facteur de contrainte dans ses calculs sur les oscillations de résonance qu'il espère mesurer, à partir du détecteur massif [22].

La solution de l'équation simplifiée (3.8) a été trouvée en 1978, par madame Borissova [27] dans le champ d'une onde gravitationnelle plane de faible intensité.

En supposant avec Weber que r^α et sa longueur $r = \sqrt{g_{\mu\nu} r^\mu r^\nu}$, sont des constantes covariantes $\frac{\mathrm{D}\, r^\alpha}{ds} = 0$, madame Borissova montra que dans le cas d'ondes gravitationnelles polarisées rectilignement suivant la direction x^2, et se propageant le long de x^1, l'équation $\frac{\mathrm{D}\, r^\alpha}{ds} = 0$ donne $r^2 = r^2_{(0)} \left[1 - A \sin \frac{\omega}{c} \left(ct + x^1\right)\right]$ (pour le cas d'un détecteur orienté suivant x^2).

A partir de ce résultat, elle obtint l'équation de Weber (3.8) sous la forme

$$\frac{d^2 \zeta^2}{dt^2} + 2\lambda \frac{d\zeta^2}{dt} + \Omega^2_0\, \zeta^2 = -A\, \omega^2 r^2_{(0)} \sin \frac{\omega}{c} \left(ct + x^1\right), \tag{3.9}$$

c'est-à-dire une équation d'oscillations forcées, où le facteur de cont-

rainte est le déplacement relatif des particules dû à l'action de l'onde gravitationnelle. Ici, $2\lambda = \frac{b}{m_0}$ et $\Omega^2_{(0)} = \frac{k}{m_0}$ sont tirés de la formule pour la force non gravitationnelle qui, agissant suivant x^2, est dans ce cas : $\Phi^2 = -k\zeta^2 - b\dot{\zeta}^2$ (k est le coefficient d'élasticité du "ressort" et b le coefficient de frottement).

A la suite de quoi, elle obtint la solution exacte de l'équation : le déplacement relatif $\eta^2 = \eta_y$ des extrémités transversales par rapport à une onde de gravitation qui progresse, est alors

$$\eta^2 = r^2_{(0)} \left[1 - A \sin \frac{\omega}{c} \left(ct + x^1 \right) \right] + M e^{-\lambda t} \sin \left(\Omega t + \alpha \right) - \\ - \frac{A\, \omega^2 r^2_{(0)}}{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2} \cos \left(\omega t + \delta + \frac{\omega}{c}\, x^1 \right), \quad (3.10)$$

où $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \omega^2}$, $\delta = \arctan \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \Omega_0^2}$, tandis que M et α sont des constantes.

Dans cette solution, les oscillations relatives sont constituées par les oscillations harmoniques de "base" (ou fondamentales), et les oscillations amorties (deux premiers termes), ainsi que par les oscillations de résonance (troisième terme).

Madame Borissova [27], démontra que l'équation finale (3.8) ne pouvait être déduite, qu'en tenant compte des simplifications de Weber :

a) On peut considérer qu'il y avait en réalité deux détecteurs en un : un gros cylindre de longueur constante r et un petit cylindre figuré par la variation de longueur ζ provoquée par l'onde gravitationnelle. Mais les expériences réelles montrent à l'évidence, que c'est l'ensemble du détecteur massif qui réagit aux influences extérieures ;

b) Les symboles de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sont tous nuls. Là encore, puisque le tenseur de courbure est présent, les $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ ne peuvent se réduire à zéro dans une région finie [18]. Donc, dans un voisinage de la particule, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \neq 0$;

c) Les extrémités du cylindre sont au repos par rapport à l'observateur ($U^i = 0$), durant tout le temps de passage de l'onde gravitationnelle. Par suite, seules des *oscillations en résonance* peuvent être enregistrées par ce type de détecteur. Les oscillations paramétriques ne pourront donc pas apparaître ici.

Les mêmes restrictions étant valables pour l'équation de déviation non géodésique, l'ensemble de ces remarques s'applique également au détecteur sans masse.

Selon son équation simplifiée (3.8), Weber postula en fait que les ondes gravitationnelles obligent les particules au repos à subir des oscillations de résonance relatives. Ces assertions le conduisirent à admettre une forme particulière de l'intérieur de ses deux types de détecteurs, où les oscillations paramétriques ne sont pas prises en compte.

§3.4 Les équations principales

Nous nous proposons ici de résoudre les équations de déviation en conjonction avec les équations du mouvement dans le cas général où la paire de particules se meut initialement par rapport à l'observateur ($U^i \neq 0$), et sans les simplifications de Weber.

Nous allons résoudre les équations en termes de grandeurs physiquement observables [2–4], qui sont les projections chr.inv. de quantités quadridimensionnelles sur la ligne de temps et la section spatiale d'un observateur. Par exemple (voir §1.2 du chapitre 1), tout vecteur Q^α a deux projections chr.inv : $\frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}}$ et Q^i. Nous désignons

$$\sigma = \frac{\Phi_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad f^i = \Phi^i \tag{3.11}$$

pour la force de liaison Φ^α, et également

$$\varphi = \frac{\eta_0}{\sqrt{g_{00}}}\,, \qquad \eta^i \equiv \eta^i \tag{3.12}$$

pour le vecteur de déviation η^α.

Nous considérons ensuite les lignes de déviation non géodésique comme un cas standard, où le membre de droite est non nul.

Les équations non géodésiques généralement covariantes du mouvement (3.1), admettent deux projections chr.inv.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2}\,F_i\,\mathrm{v}^i + \frac{m}{c^2}\,D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k = \frac{\sigma}{c} \\ &\frac{d}{d\tau}(m\mathrm{v}^i) - mF^i + 2m\big(D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot}\big) + m\,\Delta^i_{kn}\mathrm{v}^k\mathrm{v}^n = f^i \end{aligned}\right\}, \tag{3.13}$$

pour lesquelles nous maintiendrons les notations conventionnelles : m est la masse relativiste de la particule, v^i sa vitesse chr.inv.physiquement observable, $d\tau$ est l'intervalle de temps physiquement observable, F_i le vecteur chr.inv. de la force d'inertie gravitationnelle, A_{ik} est le tenseur chr.inv. des vitesses angulaires de rotation d'espace, D_{ik} est le tenseur de déformations d'espace, et enfin les Δ^i_{kn} sont les symboles de Christoffel chr.inv. formés comme les symboles de Christoffel classiques $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ à partir

des h_{ik} substitués aux $g_{\alpha\beta}$. Voir l'ensemble de ces définitions chr.inv. au §1.2 du chapitre 1.

Nous écrivons maintenant l'équation de Synge-Weber pour les lignes de déviation non géodésique (3.2) sous la forme développée

$$\frac{d^2\eta^\alpha}{ds^2} + 2\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,\frac{d\eta^\mu}{ds}\,U^\nu + \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma}\,U^\beta U^\delta \eta^\gamma = \frac{1}{m_0 c^2}\,\frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial x^\gamma}\,\eta^\gamma, \tag{3.14}$$

où ds^2 peut s'exprimer au moyen de l'intervalle de temps observable $d\tau$ selon (1.29), à savoir $ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 = c^2 d\tau^2\big(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\big)$.

Nous considérons ensuite la métrique bien connue du champ faible d'ondes gravitationnelles planes

$$\begin{aligned} ds^2 = c^2dt^2 - (dx^1)^2 - (1+a)(dx^2)^2 + \\ + 2\,b\,dx^2dx^3 - (1-a)(dx^3)^2, \end{aligned} \tag{3.15}$$

où a et b sont fonctions de $ct + x^1$ (c'est-à-dire que dans le cas présent, les ondes gravitationnelles planes de faible intensité se propagent suivant x^1), et ont des valeur négligeables, de sorte que le carré du produit de leurs dérivées s'évanouit.

Dans le détecteur, la vitesse des deux particules (extrémités) est manifestement très basse. De ce fait, pour la métrique relative aux ondes gravitationnelles (3.15), on aura

$$\left.\begin{aligned} &d\tau = dt\,, && \eta^0 = \eta_0 = \varphi\,, && \Phi^0 = \Phi_0 = \sigma \\ &\Gamma^0_{kn} = \frac{1}{c}\,D_{kn}\,, && \Gamma^i_{0k} = \frac{1}{c}\,D^i_k\,, && \Gamma^i_{kn} = \Delta^i_{kn} \end{aligned}\right\}. \tag{3.16}$$

Compte tenu des ces résultats, on obtient les projections chr.inv. de l'équation de Synge-Weber (3.14)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2}{c}\,D_{kn}\frac{d\eta^k}{dt}\,\mathrm{v}^n + \left(\varphi\,\frac{\partial D_{kn}}{\partial t} + c\,\frac{\partial D_{kn}}{\partial x^m}\,\eta^m\right)\frac{\mathrm{v}^k\mathrm{v}^n}{c^2} = \\ &= \frac{1}{m_0}\left(\frac{\varphi}{c}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial\sigma}{\partial x^m}\,\eta^m\right) \\ &\frac{d^2\eta^i}{dt^2} + \frac{2}{c}\,D^i_k\left(\frac{d\varphi}{dt}\,\mathrm{v}^k + c\,\frac{d\eta^k}{dt}\right) + 2\Delta^i_{kn}\frac{d\eta^k}{dt}\,\mathrm{v}^n + \\ &+ 2\left(\frac{\varphi}{c}\frac{\partial D^i_k}{\partial t} + \frac{\partial D^i_k}{\partial x^m}\,\eta^m\right)\mathrm{v}^k + \left(\frac{\varphi}{c}\frac{\partial\Delta^i_{kn}}{\partial t} + \frac{\partial\Delta^i_{kn}}{\partial x^m}\,\eta^m\right)\mathrm{v}^k\mathrm{v}^n = \\ &= \frac{1}{m_0}\left(\frac{\varphi}{c}\frac{\partial f^i}{\partial t} + \frac{\partial f^i}{\partial x^m}\,\eta^m\right) \end{aligned}\right\}. \tag{3.17}$$

Ayant explicité les composantes, on voit que les équations de déviation géodésique chr.inv. (3.17) forment un système d'équations différentielles du deuxième ordre, par rapport à φ, η^1, η^2, η^3 où les coefficients variables des fonctions sont les quantités $\dot{a}$, $\ddot{a}$, v^1, v^2, v^3. Pour résoudre ce système, nous tirons a de la métrique d'onde gravitationnelle donnée (3.15), tandis que v^i sera déduit des équations du mouvement non géodésique (3.13).

§3.5 Solution exacte pour un détecteur sans masse

Nous allons d'abord résoudre les équations de déviation chr.inv. (3.17) pour un détecteur sans masse, où les deux particules n'interagissent pas entre elles ($\Phi^\alpha = 0$) — le second membre dans ces équations est nul.

On trouve alors la solution d'une onde progressant le long de x^1 dans le champ gravitationnel, et polarisée rectilignement suivant la direction x^2 ($b = 0$). La métrique (3.15) donne dans ce cas

$$\left.\begin{aligned} &D_{22} = -D_{33} = \frac{1}{2}\,\dot{a}\,, && \frac{d}{dx^1} = \frac{1}{c}\frac{d}{dt} \\ &\Delta^1_{22} = -\Delta^1_{33} = -\frac{1}{2c}\,\dot{a}\,, && \Delta^2_{12} = -\Delta^3_{13} = \frac{1}{2c}\,\dot{a} \end{aligned}\right\}. \tag{3.18}$$

Par suite, puisque maintenant $\Phi^\alpha = 0$, les équations du mouvement chr.inv. (3.13) prennent la forme

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{v}^2)^2 - (\mathrm{v}^3)^2 = 0 \\ &\frac{d\mathrm{v}^1}{dt} = 0\,, \quad \frac{d\mathrm{v}^2}{dt} + \dot{a}\,\mathrm{v}^2 = 0\,, \quad \frac{d\mathrm{v}^3}{dt} + \dot{a}\,\mathrm{v}^3 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.19}$$

On remarque que $\mathrm{v}^1 = \mathrm{v}^1_{(0)} = const$, et donc, aucune particule n'est perturbée par une onde gravitationnelle transversale dans la direction longitudinale. Par conséquent

$$\mathrm{v}^1 = \mathrm{v}^1_{(0)} = 0\,. \tag{3.20}$$

Les deux dernières équations spatiales sont aussi simples à intégrer. Il vient

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}^2_{(0)}\,e^{-a}, \qquad \mathrm{v}^3 = \mathrm{v}^3_{(0)}\,e^{+a}. \tag{3.21}$$

En supposant l'onde simplement harmonique, $\omega = const$, et possédant une amplitude constante $A = const$, c'est-à-dire $a = A \sin \frac{\omega}{c}(ct + x^1)$, puis développant l'exponentielle en série (en négligeant les termes d'ordre supérieur), on obtient

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}^2_{(0)} \left[1 - A \sin \frac{\omega}{c}(ct + x^1)\right], \tag{3.22}$$

$$\mathrm{v}^3 = \mathrm{v}^3_{(0)} \left[1 + A \sin \frac{\omega}{c}(ct + x^1)\right]. \tag{3.23}$$

Substituant alors ces solutions dans les équations de déviation non géodésique chr.inv. (3.17), en posant le second membre égal à zéro, comme pour les équations géodésiques, on trouve

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\dot{a}}{c}\left(\frac{d\eta^2}{dt}\,\mathrm{v}^2_{(0)} - \frac{d\eta^3}{dt}\,\mathrm{v}^3_{(0)}\right) = 0\,, \tag{3.24}$$

$$\frac{d^2\eta^1}{dt^2} - \frac{\dot{a}}{c}\left(\frac{d\eta^2}{dt}\,\mathrm{v}^2_{(0)} - \frac{d\eta^3}{dt}\,\mathrm{v}^3_{(0)}\right) = 0\,, \tag{3.25}$$

$$\frac{d^2\eta^2}{dt^2} + \dot{a}\,\frac{d\eta^2}{dt} + \frac{\dot{a}}{c}\left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\eta^1}{dt}\right)\mathrm{v}^2_{(0)} + \frac{\ddot{a}}{c}\,(\varphi + \eta^1)\,\mathrm{v}^2_{(0)} = 0\,, \tag{3.26}$$

$$\frac{d^2\eta^3}{dt^2} - \dot{a}\,\frac{d\eta^3}{dt} - \frac{\dot{a}}{c}\left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\eta^1}{dt}\right)\mathrm{v}^2_{(0)} - \frac{\ddot{a}}{c}\,(\varphi + \eta^1)\,\mathrm{v}^2_{(0)} = 0\,. \tag{3.27}$$

Sommant les deux premières équations, puis intégrant cette somme, on obtient finalement

$$\varphi + \eta^1 = B_1\,t + B_2\,, \tag{3.28}$$

où B_1 et B_2 sont des constantes d'intégration. Substituant à nouveau ces résultats dans les deux dernières équations, on trouve deux équations qui ne diffèrent que par le signe de a, et peuvent donc être résolues de la même manière

$$\frac{d^2\eta^2}{dt^2} + \dot{a}\,\frac{d\eta^2}{dt} + \frac{\dot{a}}{c}\,B_1\,\mathrm{v}^2_{(0)} + \frac{\ddot{a}}{c}\,(B_1 t + B_2)\,\mathrm{v}^2_{(0)} = 0\,, \tag{3.29}$$

$$\frac{d^2\eta^3}{dt^2} - \dot{a}\,\frac{d\eta^2}{dt} - \frac{\dot{a}}{c}\,B_1\,\mathrm{v}^3_{(0)} - \frac{\ddot{a}}{c}\,\big(B_1 t + B_2\big)\,\mathrm{v}^3_{(0)} = 0\,. \tag{3.30}$$

Nous introduisons à présent une nouvelle variable $y = \frac{d\eta^2}{dt}$. On obtient alors une équation uniforme et linéaire du premier ordre par rapport à y

$$\dot{y} + \dot{a}y = -\frac{\dot{a}}{c}\,B_1\,\mathrm{v}^2_{(0)} - \frac{\ddot{a}}{c}\,\big(B_1 t + B_2\big)\,\mathrm{v}^2_{(0)}\,, \tag{3.31}$$

dont la solution est

$$y = e^{-F}\left(y_0 + \int_0^t g(t)\,e^F\,dt\right), \quad F(t) = \int_0^t f(t)\,dt\,, \tag{3.32}$$

où, dans le cas présent, $F(t)=\dot{a}$, $g(t)=-\frac{\dot{a}}{c}B_1\,\mathrm{v}^2_{(0)}-(B_1t+B_2)\,\mathrm{v}^2_{(0)}$. Développant à nouveau l'exponentielle en série suivant y (3.32), et intégrant, on trouve

$$y=\dot{\eta}^2=\dot{\eta}^2_{(0)}\left[1-A\sin\frac{\omega}{c}\,(ct+x^1)\right]-\frac{A\omega}{c}\,\mathrm{v}^2_{(0)}\times$$
$$\times\,\big(B_1t+B_2\big)\cos\frac{\omega}{c}\,(ct+x^1)+\frac{A\omega}{c}\,B_2\,\mathrm{v}^2_{(0)}\,. \tag{3.33}$$

Nous allons intégrer cette équation, et appliquer la même méthode pour η^3. On trouve alors les déplacements relatifs physiquement observables η^2 et η^3 dans un détecteur sans masse

$$\eta^2=\eta^2_{(0)}+\left(\dot{\eta}^2_{(0)}+\frac{A\,\omega B_2\,\mathrm{v}^2_{(0)}}{c}\right)t+\frac{A}{\omega}\left(\dot{\eta}^2_{(0)}-\frac{\mathrm{v}^2_{(0)}}{c}B_1\right)\times$$
$$\times\left[\cos\frac{\omega}{c}\,(ct+x^1)-1\right]-\frac{A\mathrm{v}^2_{(0)}}{c}\,(B_1t+B_2)\sin\frac{\omega}{c}\,(ct+x^1)\,, \tag{3.34}$$

$$\eta^3=\eta^3_{(0)}+\left(\dot{\eta}^3_{(0)}-\frac{A\,\omega B_2\,\mathrm{v}^3_{(0)}}{c}\right)t-\frac{A}{\omega}\left(\dot{\eta}^3_{(0)}-\frac{\mathrm{v}^3_{(0)}}{c}B_1\right)\times$$
$$\times\left[\cos\frac{\omega}{c}\,(c\,t+x^1)-1\right]+\frac{A\mathrm{v}^3_{(0)}}{c}\big(B_1t+B_2\big)\sin\frac{\omega}{c}\,(c\,t+x^1)\,. \tag{3.35}$$

A l'aide de $\dot{\eta}^2$ et $\dot{\eta}^3$, on trouve le déplacement relatif physiquement observable η^1 (3.25) dans un détecteur sans masse, et le décalage temporel physiquement observable φ (3.24) mesuré à ses extrémités

$$\eta^1=\dot{\eta}^1_{(0)}\,t-\frac{A}{\omega c}\left(\mathrm{v}^2_{(0)}\,\dot{\eta}^2_{(0)}-\mathrm{v}^3_{(0)}\,\dot{\eta}^3_{(0)}\right)\left[1-\cos\frac{\omega}{c}\,(ct+x^1)\right]+\eta^1_{(0)}\,, \tag{3.36}$$

$$\varphi=\dot{\varphi}_{(0)}\,t+\frac{A}{\omega c}\left(\mathrm{v}^2_{(0)}\,\dot{\eta}^2_{(0)}-\mathrm{v}^3_{(0)}\,\dot{\eta}^3_{(0)}\right)\left[1-\cos\frac{\omega}{c}\,(ct+x^1)\right]+\eta^1_{(0)}\,. \tag{3.37}$$

Finalement, on substitue dans $\varphi+\eta^1=B_1\,t+B_2$, pour fixer les constantes d'intégration. On obtient

$$B_1=\dot{\varphi}_{(0)}+\dot{\eta}^1_{(0)}\,,\qquad B_2=\varphi_{(0)}+\eta^1_{(0)}\,. \tag{3.38}$$

De la sorte, nous aurons obtenu les solutions exactes φ, η^1, η^2, η^3 des équations de déviation des géodésiques chr.inv. dans un champ d'ondes gravitationnelles.

En procédant à partir des solutions exactes pour le détecteur sans masse, on parvient ainsi aux conclusions suivantes :

1) D'après les solutions η^2 (3.34) et η^3 (3.35), on voit que les ondes de gravitation peuvent astreindre les extrémités du détecteur sans masse à des oscillations relatives dans les directions x^2 et x^3, transversales à la propagation de l'onde. Corrélativement, cet effet aura lieu si le détecteur est déplacé initialement par rapport à l'espace local ($\mathrm{v}^2_{(0)} \neq 0$, $\mathrm{v}^3_{(0)} \neq 0$) ou alternativement, si ses extrémités se déplacent l'une par rapport à l'autre, dès l'origine. Par exemple, si les extrémités du détecteur sans masse sont au repos par rapport à la direction x^2, elles ne seront pas perturbées par une onde progressant suivant x^1 ;
2) La solution η^1 (3.36) rend compte du fait que les ondes gravitationnelles peuvent néanmoins communiquer des oscillations aux extrémités du détecteur sans masse dans la direction de propagation de l'onde, à condition qu'elles progressent initialement par rapport à l'espace local, et les unes par rapport aux autres, suivant au moins une des directions transversales x^2 et x^3 ;
3) La solution φ (3.37) représente le décalage temporel entre les horloges situées aux extrémités du détecteur sans masse, décalage dû à l'influence d'une onde gravitationnelle. A partir de (3.37), cet effet a lieu si les extrémités sont initialement déplacées par rapport à l'espace local, ainsi que les unes par rapport aux autres, suivant au moins une des directions transversales x^2 et x^3.

En accord avec les résultats que nous avons obtenu, on est alors conduit à envisager une nouvelle approche de la détection des ondes de gravitation qui soit différente de celle de Weber. Pour ce faire, nous proposons donc une redéfinition de l'expérience à travers le détecteur de type sans masse :

Nouvelle experimentation (detecteur sans masse) :
Utilisation d'un détecteur de type sans masse dans lequel deux miroirs suffisamment distants, sont suspendus et vibrent en produisant des oscillations libres entre eux ($\dot{\eta}^i_{(0)} \neq 0$), ou des oscillations communes suivant des lignes parallèles ($\mathrm{v}^i_{(0)} \neq 0$). Conformément aux solutions exactes pour un détecteur sans masse tel que nous l'avons décrit plus haut, une onde gravitationnelle va produire un effet paramétrique sur les oscillations fondamentales des miroirs, qui pourra être alors enregistré par un laser à capteur de portée. Par ailleurs, la solution prévoit un décalage temporel entre les miroirs, qui sera mesuré par des horloges synchronisées situées sur chacun d'eux : leur désynchronisation révèlera alors la détection d'une onde gravitationnelle.

§3.6 Solution exacte pour un détecteur massif

Nous supposerons que la force élastique satisfaisant $\Phi^\alpha = -k^\alpha_\sigma x^\sigma$ qui relie deux particules dans un détecteur solide, est indépendante du temps ($k^0_\sigma = 0$). Dans ce cas, les équations du mouvement chr.inv. (3.13) prennent la forme

$$(\mathrm{v}^2)^2 - (\mathrm{v}^3)^2 = 0\,, \tag{3.39}$$

$$\frac{d\mathrm{v}^1}{dt} = -\frac{k^1_\sigma}{m_0}\,x^\sigma, \tag{3.40}$$

$$\frac{d\mathrm{v}^2}{dt} + \dot{a}\,\mathrm{v}^2 = -\frac{k^2_\sigma}{m_0}\,x^\sigma, \tag{3.41}$$

$$\frac{d\mathrm{v}^3}{dt} - \dot{a}\,\mathrm{v}^3 = -\frac{k^3_\sigma}{m_0}\,x^\sigma, \tag{3.42}$$

où (3.40) signifie $\mathrm{v}^1 = \mathrm{v}^1_{(0)} = const$. Par suite, dans le détecteur

$$\mathrm{v}^1 = \mathrm{v}^1_{(0)} = 0\,, \qquad k^1_\sigma = 0\,. \tag{3.43}$$

Seules, deux équations (3.41) et (3.42) sont ici essentielles. Comme elles ne diffèrent que par le signe de $\dot{a}$, il nous suffit de résoudre (3.41).

Supposons que le détecteur de type solide soit élastique dans deux directions transversales par rapport à la propagation de l'onde gravitationnelle qui progresse vers le détecteur suivant la direction x^1. Dans ce cas, le coefficient d'élasticité est $k^2_\sigma = k^3_\sigma = k = const$. Puisque $a = A \sin \frac{\omega}{c}\,(ct + x^1)$, comme déduit précédemment, et désignant $x^2 \equiv x$, $\frac{k}{m_0} = \Omega^2$, $A\omega = -\mu$, (3.41) se réduit à

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = \mu \cos \frac{\omega}{c}\,(c\,t + x^1)\,\dot{x}\,, \tag{3.44}$$

où μ est un "petit paramètre". Nous résoudrons cette équation par la méthode de Poincaré, également connue comme méthode du paramètre infinitésimal ou méthode des perturbations : le membre de droite est considéré comme la perturbation de contrainte d'une oscillation harmonique décrite par le membre de gauche. Il s'agit d'une méthode de résolution exacte, car une des solutions qu'elle permet de déduire, est un développement en séries par le paramètre en question (voir chapitre XII, §2 dans Lefchetz [28]).

Pour le rendre sans dimension, nous introduirons toujours avec Lefshetz, une nouvelle variable $t' = \Omega t$, et $\mu' = \frac{\mu}{\Omega}$

$$\ddot{x} + x = \mu' \cos \frac{\omega}{\Omega c}\,(c\,t' + \Omega x^1)\,\dot{x}\,. \tag{3.45}$$

Une solution générale de cette équation, représentable comme

$$\dot{x} = y\,, \quad \dot{y} = -\,x + \mu' \cos \frac{\omega}{\Omega c}\,(ct' + \Omega x^1)\,y \tag{3.46}$$

avec les conditions initiales $x_{(0)}$ et $y_{(0)}$ à $t'=0$, est déterminée par la paire de séries (Lefshetz)

$$\left.\begin{aligned} x &= P_0\,(x_{(0)}, y_{(0)}, t') + \mu' P_1(x_{(0)}, y_{(0)}, t') + \dots \\ y &= \dot{P}_0\,(x_{(0)}, y_{(0)}, t') + \mu' \dot{P}_1(x_{(0)}, y_{(0)}, t') + \dots \end{aligned}\right\}. \tag{3.47}$$

Nous les substituons dans (3.46), et égalant les coefficients de μ' dans le même ordre, il vient

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{P}_0 + P_0 = 0 \\ &\ddot{P}_1 + P_1 = \dot{P}_0 \cos \frac{\omega}{\Omega c}\,(ct' + \Omega x^1) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{3.48}$$

avec les conditions initiales $P_0(0)=\xi$, $\dot{P}_0(0)=\vartheta$, $P_1(0)=\dot{P}_1(0)=0$ (où $n>0$) à $t'=0$. En raison de la petitesse de l'amplitude A (présente dans la variable $\mu'=-\frac{\omega}{\Omega}A$), ce problème ne concerne que les deux premières équations. La première est une équation d'oscillations harmoniques dont la solution est

$$P_0 = \xi \cos t' + \vartheta \sin t', \tag{3.49}$$

tandis que la deuxième devient avec cette solution

$$\ddot{P}_1 + P_1 = (-\,\xi \sin t' + \vartheta \cos t') \cos \frac{\omega}{\Omega c}\,(c\,t' + \Omega x^1)\,. \tag{3.50}$$

C'est une équation linéaire uniforme. D'après Kamke, (voir partie III, chapitre II, §2.5 dans [29]), sa solution est

$$\begin{aligned} P_1 = {} & \frac{\vartheta\,\Omega^2}{2} \left\{ \frac{\cos\left[(\Omega-\omega)\,t - \frac{\omega}{c}\,x^1\right]}{\Omega^2-(\Omega-\omega)^2} + \frac{\cos\left[(\Omega+\omega)\,t + \frac{\omega}{c}\,x^1\right]}{\Omega^2-(\Omega+\omega)^2} \right\} - \\ & - \frac{i\,\xi\,\Omega^2}{2} \left\{ \frac{\sin\left[(\Omega-\omega)\,t - \frac{\omega}{c}\,x^1\right]}{\Omega^2-(\Omega-\omega)^2} + \frac{\sin\left[(\Omega+\omega)\,t + \frac{\omega}{c}\,x^1\right]}{\Omega^2-(\Omega+\omega)^2} \right\}, \end{aligned} \tag{3.51}$$

où les parenthèses contiennent les parties réelle et imaginaire de la somme $e^{i(\Omega-\omega)\,t - \frac{\omega}{c}\,x^1} + e^{i(\Omega+\omega)\,t + \frac{\omega}{c}\,x^1}$. Substituant celles-ci dans (3.47),

et revenant à $x = x^2$, on obtient les solutions réelles finales

$$x^2 = \xi \cos \Omega t + \vartheta \sin \Omega t - \frac{A\omega\Omega\vartheta}{2} \times \\ \times \left\{ \frac{\cos\left[(\Omega-\omega)t - \frac{\omega}{c}x^1\right]}{\Omega^2-(\Omega-\omega)^2} + \frac{\cos\left[(\Omega+\omega)t + \frac{\omega}{c}x^1\right]}{\Omega^2-(\Omega+\omega)^2} \right\}, \tag{3.52}$$

tandis que la solution pour x^3 ne diffèrera que par le signe de A.

A l'aide de ce résultat, nous allons résoudre les équation de déviation non géodésique (3.17).

Pour le cylindre en question, on supposera $\mathrm{v}^1 = 0$, $\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}^3$, $\Phi^1 = 0$, $\Phi^2 = -\frac{k}{m_0}\eta^2$, $\Phi^3 = -\frac{k}{m_0}\eta^3$, où $\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}^3$ signifie que les condition initiales ξ et ϑ sont les mêmes pour les deux directions x^2 et x^3. De ce fait, les équations de déviation suivant $x^0 = ct$, et x^1, sont

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0\,, \qquad \frac{d^2\eta^1}{dt^2} = 0\,, \tag{3.53}$$

et pour leurs solutions, on peut alors poser $\varphi = 0$ et $\eta^1 = 0$.

Compte tenu de ce qui précède, l'équation de déviation le long de x^2 (qui ne diffère de celle suivant x^3 que par le signe de A), est

$$\frac{d^2\eta^2}{dt^2} + \frac{k}{m_0}\eta^2 = -A\omega \cos\frac{\omega}{c}(ct + x^1)\frac{d\eta^2}{dt}\,, \tag{3.54}$$

qui est identique à (3.44). Par suite, les solutions η^2 et η^3 doivent être similaires à (3.52). Il en résulte que

$$\eta^2 = \xi \cos \Omega t + \vartheta \sin \Omega t - \frac{A\omega\Omega\vartheta}{2} \times \\ \times \left\{ \frac{\cos\left[(\Omega-\omega)t - \frac{\omega}{c}x^1\right]}{\Omega^2-(\Omega-\omega)^2} + \frac{\cos\left[(\Omega+\omega)t + \frac{\omega}{c}x^1\right]}{\Omega^2-(\Omega+\omega)^2} \right\}, \tag{3.55}$$

$$\eta^3 = \xi \cos \Omega t + \vartheta \sin \Omega t + \frac{A\omega\Omega\vartheta}{2} \times \\ \times \left\{ \frac{\cos\left[(\Omega-\omega)t - \frac{\omega}{c}x^1\right]}{\Omega^2-(\Omega-\omega)^2} + \frac{\cos\left[(\Omega+\omega)t + \frac{\omega}{c}x^1\right]}{\Omega^2-(\Omega+\omega)^2} \right\}. \tag{3.56}$$

Ce sont les solutions exactes des équations de déviation non géodésique chr.inv. dans un champ d'ondes gravitationnelles. Ces solutions nous conduisent à admettre les conclusions suivantes :

1) Les solutions $\varphi = const$ et $\eta^1 = const$ révèlent qu'une onde gravitationnelle qui atteint le corps massif horizontalement suspendu, ne perturbe ni la dimension verticale η^1 du cylindre ni le décalage temporel φ entre ses extrémités ;
2) Comme on le voit d'après les solutions η^2 (3.55) et η^3 (3.56), les ondes gravitationnelles peuvent astreindre les extrémités à des oscillations relatives transversales par rapport à la propagation de l'onde : a) ces oscillations ont la fréquence ω des ondes gravitationnelles ; b) les oscillations de résonance apparaissent dès que la fréquence des ondes gravitationnelles devient le double de la fréquence fondamentale des extrémités ($\omega = 2\Omega$). Les deux effets ont une origine paramétrique : ils se produisent seulement si les extrémités du cylindre sont déjà en oscillation relative ($\Omega \neq 0$). En l'absence d'oscillation initiale, le détecteur de type solide ne détectera donc aucune onde gravitationnelle.

En fonction de nos résultats théoriques, nous proposons alors une redéfinition de l'expérience à travers le détecteur de type solide :

> Nouvelle experimentation (detecteur massif) :
> Utilisation d'un détecteur de type solide (cheville cylindrique), suspendu horizontalement, et dont les corps sont initialement soumis à des oscillations produites en laboratoire, de façon à ce que les extrémités soient assujetties à des oscillations relatives ($\Omega \neq 0$). Selon les solutions exactes pour les détecteurs massifs, et en raison de l'influence de l'onde gravitationnelle, un tel système peut avoir un effet paramétrique sur les oscillations fondamentales de ses extrémités, et donc mesurable par effet piézo-électrique.

§3.7 Conclusions

Notre définition de l'expérience sur les ondes gravitationnelles, repose sur les équations de déviation des lignes géodésiques ainsi que sur les équations de déviation non géodésique. Les résultats de Weber ne s'appuyaient pas sur une solution exacte des équations, mais sur l'analyse approximative des résultats qu'il escomptait : il prévoyait que l'influence d'une onde gravitationnelle plane de faible intensité déplace deux masses au repos l'une par rapport à l'autre. Les solutions exactes ont été obtenues ici pour l'équation de déviation de particules libres, ou liées par un ressort. Ces solutions montrent clairement qu'une onde gravitationnelle peut déplacer les particules dans un système qui en comporte deux, uniquement si ces particules ou leurs espaces locaux ,sont en mouvement relatif (aucun effet ne se produit si elles sont au repos). Par conséquent, les

ondes gravitationnelles génèrent un effet paramétrique sur un système à deux particules. En accord avec ces solutions, on peut proposer un détecteur modifié qui interagit avec l'onde gravitationnelle comme suit : a) un détecteur sans masse dans lequel les miroirs suspendus sont déjà en oscillation l'un par rapport à l'autre, dans le laboratoire ; b) un cylindre suspendu horizontalement détecteur, dont les extrémités ont déjà été mis en oscillation relative à partir d'une source du laboratoire.

Chapitre 4

Téléportation non quantique. Lumière figée

§4.1 Trajectoire d'un déplacement instantané. Zéro-espace : Téléportation non quantique d'un photon

On sait que l'espace-temps de la relativité générale est un espace pseudo-riemannien qui est généralement courbe, inhomogène, anisotrope, non holonome (rotation), et déformé. Son intervalle d'espace-temps $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$ exprimé en termes d'observables physiques s'écrit [2–4]

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2, \tag{4.1}$$

où la quantité

$$d\tau = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) dt - \frac{1}{c^2}\, v_i\, dx^i \tag{4.2}$$

est l'intervalle de temps physiquement observable, $\mathrm{w} = c^2(1-\sqrt{g_{00}})$ est le potentiel gravitationnel, vi est la vitesse linéaire de rotation spatiale, $d\sigma^2 = h_{ik}\, dx^i dx^k$ est le carré de l'intervalle spatial physiquement observable, et h_{ik} est le tenseur métrique chr.inv.

Suivant la forme de (4.2), nous considérons le déplacement ds d'une particule dans l'espace-temps et il vient pour ds^2 :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \left(1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right), \tag{4.3}$$

où $\mathrm{v}^2 = h_{ik}\, \mathrm{v}^i \mathrm{v}^k$ tandis que $\mathrm{v}^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ est la vitesse (spatiale) tridimensionnelle de la particule. Dans ce cas, la valeur numérique de l'intervalle d'espace-temps est : a) un nombre réel pour $\mathrm{v} < c$; b) zéro pour $\mathrm{v} = c$; c) un nombre imaginaire pour $\mathrm{v} > c$.

Suivant la formule de ds^2 les particules de masse au repos non nulle ($m_0 \neq 0$), se déplacent : a) le long de trajectoires d'Univers réelles ($c d\tau > d\sigma$) atteignant des masses relativistes réelles ; b) le long de trajectoires d'Univers imaginaires ($c d\tau < d\sigma$) possèdant donc des masses relativistes imaginaires (tachyons). Pour chaque type de particule, les lignes d'Univers sont non isotropes et leur masse relativiste non nulle ($m \neq 0$). Nous désignerons celles-ci sous le vocable de particules de substance.

Les particules sans masse — particules de masse nulle au repos ($m_0 = 0$), mais non nulle en régime relativiste ($m \neq 0$), se déplacent

le long de lignes d'Univers quadridimensionnelles nulles ($ds = 0$, $c\,d\tau = d\sigma \neq 0$) à la vitesse de la lumière. Ce sont des trajectoires isotropes. Les particules de masse nulle sont apparentées aux particules du genre lumière — les quanta du champ électromagnétique (photons).

Lorsque l'intervalle de temps observable s'évanouit $d\tau = 0$, nous sommes en présence de la condition sous laquelle une particule peut se déplacer instantanément (*téléportation*). La *condition de téléportation* sera donc

$$\mathrm{w} + v_i u^i = c^2, \tag{4.4}$$

où $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ est la 3-vitesse des coordonnées. L'intervalle d'espace-temps pour lequel cette particule se déplace instantanément prend donc la forme

$$ds^2 = -\,d\sigma^2 = -\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 + g_{ik}\,dx^i dx^k \neq 0\,, \tag{4.5}$$

avec ici $1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2} = \frac{v_i u^i}{c^2}$ car $d\tau = 0$.

Dans ce cas, la signature $(+---)$ de la région spatio-temporelle d'un observateur standard devient $(-+++)$ dans la région d'espace-temps où les particules sont téléportées. Par suite, les termes "temps" et "espace tridimensionnel" sont intervertis pour cette région. Le temps des particules téléportées devient l'espace de l'observateur standard et inversement, l'espace des particules est le temps de l'observateur.

Considérons d'abord des particules dites de substance. Comme il est facile de voir, leur déplacement instantané (téléportation) s'effectue le long de trajectoires qui satisfont $ds^2 = -\,d\sigma^2 \neq 0$. Il s'ensuit que ces trajectoires définies en termes de quantités observables sont des lignes de longueur tridimensionnelle purement imaginaires $d\sigma$, mais lorsqu'elles sont exprimées dans les coordonnées d'Univers idéales t et x^i, ces trajectoires sont quadridimensionnelles. Dans le cas particulier, où l'espace est dépourvu de rotation ($v_i = 0$), ou bien lorsque sa vitesse linéaire de rotation vi est orthogonale à la vitesse des coordonnées ui de la particule de téléportation (leur produit scalaire étant $v_i u^i = |v_i||u^i| \cos(v_i; u^i) = 0$), les particules de substance peuvent être téléportées uniquement en présence d'un collapse gravitationnel ($\mathrm{w} = c^2$). Dans ce dernier cas, les trajectoires de téléportation exprimées dans les coordonnées d'Univers idéales deviennent également des trajectoires purement spatiales $ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k$.

Les particules du genre temps (ex : photons) peuvent être téléportées le long de trajectoires représentées par la métrique

$$ds^2 = -\,d\sigma^2 = -\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 + g_{ik}\,dx^i dx^k = 0\,, \tag{4.6}$$

puisque par définition, on a $ds^2 = 0$. Nous voyons donc que l'espace de téléportation des photons est caractérisé par les conditions $ds^2 = 0$ et $d\sigma^2 = c^2 d\tau^2 = 0$.

La condition de téléportation des photons ainsi déduite, s'apparente alors à l'équation du cône de lumière $c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 = 0$ où $d\sigma \neq 0$ et $d\tau \neq 0$. Cette équation décrit le cône de lumière dont les éléments sont les trajectoires des particules sans masse (particules du genre lumière). Contrairement à l'équation du cône de lumière, l'équation (4.6) est exprimée dans les coordonnées idéales t, x^i, et non en termes de quantités physiquement observables. De ce fait, les photons de téléportation se meuvent le long de trajectoires appartenant au cône d'Univers (comme le cône de lumière) dans la région d'espace-temps où les particules de substance peuvent être également téléportées . (La métrique correspondante a été calculée plus haut.)

Vue par un observateur standard, et compte tenu de la condition de téléportation des photons (4.6), la métrique spatiale observable $d\sigma^2 = h_{ik}\, dx^i dx^k$ apparaît manifestement dégénérée : $h = \det \| h_{ik} \| = 0$. signifiant automatiquement la dégénérescence du cône de lumière. Tenant compte de la relation $g = -h\, g_{00}$ [2–4], nous en concluons que la 4-métrique $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$ est également dégénérée $g = \det \| g_{\alpha\beta} \| = 0$. Les conditions de signature déterminant un espace pseudo-riemannien sont alors violées et la téléportation d'un photon se manifeste donc en dehors de l'espace-temps classique de la relativité générale. Un tel espace-temps dégénéré (déjà considéré aux §1.4 et §1.5 du chapitre 1) est appelé zéro-espace car pour un observateur standard tous les intervalles temporel et spatiaux sont partout nuls.

Pour $d\tau = 0$ et $d\sigma = 0$, la masse relativiste m et la fréquence ω s'annulent. Par conséquent, pour un observateur standard, toute particule située dans un zéro-espace (en particulier un photon de téléportation) possédant une masse au repos nulle $m_0 = 0$, aura également une masse relativiste et une fréquence nulle, $m = 0$, $\omega = 0$. Ce type de particule peut être alors considéré comme le cas limite représentant les particules totalement dépourvues de masse (particules du genre lumière).

Au §1.4, nous avons introduit le terme de zéro-particules pour toutes les particules se trouvant dans un zéro-espace. Chaque particule présente un aspect ondulatoire d'après le concept du dualisme onde-particule. Le 4-vecteur de l'onde associée est alors donné par $K_\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}$ où ψ est la phase de l'onde également appelée *Eikonale*. L'équation d'Eikonale $K_\alpha K^\alpha = 0$ [15] traduit le fait que la longueur d'un 4-vecteur reste inchangée dans un 4-espace pseudo-riemannien, et pour des particules de masse nulle du genre lumière (photons standards), celle-ci devient

l'équation de propagation de l'onde (pour plus de détails voir §1.3)

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{{}^*\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - h^{ik}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k} = 0\,. \tag{4.7}$$

L'équation d'Eikonale dans un zéro-espace prend la forme (voir §1.5)

$$h^{ik}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^i}\frac{{}^*\partial\psi}{\partial x^k} = 0\,, \tag{4.8}$$

puisque $\omega = \frac{{}^*\partial\psi}{\partial t} = 0$ annule la composante temporelle de cette équation. C'est donc une équation d'onde stationnaire. Dans le cadre du dualisme onde-particule, et par rapport à un observateur standard, toute particule se situant dans le zéro-espace, se manifestera sous la forme *d'ondes lumineuses stationnaires* qui remplissent ainsi tout cet espace (*hologrammes du genre lumière*). Par suite, toute expérience destinée à mettre en évidence la téléportation non quantique des photons sera inéluctablement liée à la lumière stationnaire (figée).

En fin de comptes, nous en concluons que les déplacements instantanés des particules sont autorisés dans l'espace temps de la relativité générale. Ainsi qu'il a été démontré, la téléportation des particules matérielles et de celles dépourvues de masse, s'effectue dans des domaines d'espace-temps distincts. Cela ne signifie nullement que la téléportation d'une particule massive nécessite une accélération supraluminique (régime tachyonique), et qu'un photon devrait être soumis à une accélération infinie. Non — comme il est aisé de voir d'après la condition de téléportation $\mathrm{w} + v_i u^i = c^2$, si le potentiel gravitationnel reste essentiel et si l'espace entre en rotation à une vitesse proche de la lumière, les particules matérielles peuvent être téléportées à des vitesses subluminiques normales. Les photons satisfont plus facilement à la condition de téléportation puisqu'ils sont déjà en régime luminique. Par rapport à un observateur standard, dès que la condition de téléportation se réalise au voisinage d'une particule en mouvement, celle-ci "disparaît" tout en conservant sa vitesse de coordonnées subluminique (ou luminique) u^i dans une autre région d'espace-temps qui nous est invisible. Ayant ainsi réduit sa vitesse, ou si la condition de téléportation s'interrompt (comme par exemple, l'abaissement du potentiel gravitationnel ou de la vitesse linéaire de rotation d'espace), la particule apparaît à un point distinct de notre Univers observable à la distance et dans la direction qu'elle aura au même instant observable.

La téléportation photonique demeure valable le long des trajectoires totalement dégénérées ($g = 0$), en dehors de l'espace-temps pseudo-riemannien ($g < 0$) alors que les trajectoires de téléportation des parti-

cules massives qui sont strictement non dégénérées ($g<0$) sont bien situées dans l'espace-temps pseudo-riemannien.[1] Ceci ne pose aucun problème, car il est toujours loisible de placer un espace tangent où $g \leqslant 0$, formé d'un espace pseudo-riemannien $g<0$, et d'un zéro-espace $g=0$, représentant ainsi deux régions distinctes d'une même variété. Un espace où $g \leqslant 0$, est une généralisation naturelle de l'espace-temps pseudo-riemannien de la relativité générale qui permet donc d'effectuer les téléportations des particules massives et des photons déjà réalisées selon le mode quantique en 1998 pour les photons [30] et pour les atomes en 2004 [31, 32].

A ce jour, seule la mécanique quantique a pu rendre compte de ce phénomène de téléportation [33]. La situation a depuis évoluée : notre théorie prévoit les conditions physiques d'une *téléportation non quantique* pour toutes les particules dans le cadre de la relativité générale.

La différence majeure réside dans le fait que pour un observateur standard, le transport parallèle d'un vecteur laisse sa longueur inchangée. Cette circonstance reste "vraie" pour les vecteurs appartenant à une région du zéro-espace parce que de toutes façons, l'observateur les évalue ainsi dans son pseudo-espace riemannien. Dans une région du zéro-espace, l'équation d'Eikonale rapportée à ses coordonnées d'Univers observables est $K_\alpha K^\alpha = 0$. Par contre, dans les coordonnées d'Univers idéales t et x^i, la métrique du zéro-espace $ds^2 = -\left(1-\frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 + g_{ik}\, dx^i dx^k = 0$, dégénère en une métrique tridimensionnelle $d\mu^2$, car dépendant du potentiel gravitationnel w non compensé par ailleurs, cette dernière n'est plus invariante

$$d\mu^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 \neq inv\,. \tag{4.9}$$

Par conséquent, dans un zéro-espace, la longueur d'un vecteur transporté, comme par exemple, le 4-vecteur vitesse de coordonnées U^α, dégénère en vecteur spatial U^i, et donc est susceptible de varier

$$U_i U^i = g_{ik} U^i U^k = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 \neq const\,. \tag{4.10}$$

On voit alors que pour un observateur standard, la géométrie observable du zéro-espace est riemannienne mais non sa géométrie réelle.

1. Tout espace à géométrie riemannienne possède par définition une métrique strictement non dégénérée ($g<0$). Les espaces pseudo-riemanniens sont des cas particuliers d'espaces de Riemann où la signature de la métrique est alternée. Einstein a établi la signature $(+---)$ ou $(-+++)$ comme base de la relativité générale. L'espace-temps de base de la relativité générale est donc caractérisé par une métrique strictement dégénérée ($g<0$).

En relation avec ce qui vient d'être dit, nous pouvons alors citer "Le Principe de Relativité Infini" introduit par Abraham Zelmanov. A la suite de ses études sur la cosmolologie relativiste, il concluait [34, 35] :

> PRINCIPE DE RELATIVITE INFINI DE ZELMANOV :
>
> Dans tout modèle cosmologique isotrope et homogène, l'infinité spatiale de l'Univers dépend de notre choix du système de référence à partir duquel nous observons l'Univers (le système de référence de l'observateur). Si l'espace tridimensionnel de l'Univers est infini pour un observateur dans un référentiel, il peut être fini pour un autre système de référence. Il en est de même pour le temps au cours duquel l'Univers évolue.

Nous somme donc parvenu au "Principe de Relativité Fini". Ainsi que nous l'avons montré, en raison de la différence entre les coordonnées d'Univers observables et idéales, la même région d'espace-temps sera différente suivant les référentiels correspondants. Donc, dans les coordonnées d'Univers observables, une région du zéro-espace est un point ($d\tau = 0$, $d\sigma = 0$) alors que $d\tau = 0$, $d\sigma = 0$ prises dans les coordonnées d'Univers idéales deviennent $-\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 + g_{ik}\, dx^i dx^k = 0$, qui est l'équation d'un cône quadridimensionnel comme l'équation du cône de lumière $c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 = 0$. Nous avons là le "Principe de Relativité Fini" appliqué aux objets observés — un point observé représente tout l'espace rapporté à des coordonnées idéales.

Par ailleurs, ce résultat est actuellement la seule explication théorique du phénomène de téléportation observé [30–32] déduit à travers la relativité générale.

§4.2 La structure géométrique du zéro-espace

Un observateur standard réel est donc celui qui perçoit l'ensemble du zéro-espace comme étant une région déterminée par les conditions observables de dégénérescence que sont $d\tau = 0$ et $d\sigma^2 = h_{ik}\, dx^i dx^k = 0$ (voir §1.4 pour plus de détails).

La signification physique de la première condition $d\tau = 0$ est que l'observateur réel perçoit simultanément deux évènements du zéro-espace quelque soit la distance qui les sépare. Ce mode de transmission d'informations est appelé *action de longue portée*.

La seconde condition $d\sigma^2 = 0$ traduit l'absence de distance observable entre l'évènement et l'observateur. Une telle "superposition" de l'observateur et de l'objet observé n'est possible que si nous supposons

que notre espace pseudo-riemannien standard coïncide avec le zéro-espace en tous ses points (c'est-à-dire qu'il est lui-même empli par le zéro-espace).

Nous allons à présent nous pencher sur l'interprétation mathématique des conditions de dégénérescence.

La quantité $c\,d\tau$ est une projection chr.inv. du 4-intervalle de coordonnées dx^α sur la ligne de temps $c\,d\tau = b_\alpha dx^\alpha$. Le vecteur d'Univers propre b^α de l'observateur ainsi que dx^α sont par définition non nuls. Par suite, $d\tau = 0$ est vrai pour $d\sigma^2 = 0$ seulement si la métrique d'espace-temps $ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$ est dégénérée, c'est-à-dire si le déterminant du tenseur métrique s'annule

$$g = \det \| g_{\alpha\beta} \| = 0\,. \tag{4.11}$$

De la même façon, la condition $d\sigma^2 = h_{ik}\, dx^i dx^k = 0$ signifie que dans la région correspondante la métrique est dégénérée

$$h = \det \| h_{ik} \| = 0\,. \tag{4.12}$$

En substituant les conditions de dégénérescence de l'espace-temps, $\mathrm{w} + v_i u^i = c^2$ et $g_{ik}\, dx^i dx^k = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2$ dans $d\sigma^2 = h_{ik}\, dx^i dx^k = 0$, on obtient la métrique du zéro-espace

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 - g_{ik}\, dx^i dx^k = 0\,. \tag{4.13}$$

Par conséquent, à l'intérieur du zéro-espace (du point de vue d'un observateur "interne"), l'espace tridimensionnel est holonome alors que la rotation du zéro-espace est présente à travers la composante temporelle de sa métrique

$$\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 = \left(\frac{v_i u^i}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2. \tag{4.14}$$

Si $\mathrm{w} = c^2$, (condition requise pour un collapse gravitationnel), la métrique du zéro-espace (4.13) prend la forme

$$ds^2 = -\, g_{ik}\, dx^i dx^k = 0\,, \tag{4.15}$$

c'est à dire qu'elle se réduit à une métrique purement tridimensionnelle et l'espace tridimensionnel correspondant devient également dégénéré

$$g_{(3\mathrm{D})} = \det \| g_{ik} \| = 0\,. \tag{4.16}$$

Ici la condition $g_{(3\mathrm{D})} = 0$ provient du fait que $g_{ik}\, dx^i dx^k$ possède un signe défini, et donc s'annule si le déterminant de g_{ik} est égal à zéro.

La condition $v_i u^i = 0$ se vérifie, car en présence d'un collapse gravi-

tationnel, on a pour tout zéro-espace $\mathrm{w} + v_i u^i = c^2$.

Le produit scalaire de la vitesse linéaire de rotation d'espace et de la vitesse de coordonnées d'une zéro-particule, $v_i u^i = vu \cos(v_i; u^i)$, définit ici la *chiralité* de la zéro-particule.

Lorsque $v_i u^i > 0$, l'angle α entre v_i et u^i est compris dans l'intervalle $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Etant donné que $g_{ik} u^i u^k = c^2 \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2$, qui est la deuxième condition de dégénérescence, on aura $u = c\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)$, ce qui implique pour le potentiel de gravitation $\mathrm{w} < c^2$ (champ gravitationnel standard).

Lorsque $v_i u^i < 0$, l'angle α est compris entre $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ et on obtient $\mathrm{w} > c^2$ (champ gravitationnel très intense).

La condition $v_i u^i = 0$ est vérifiée seulement si $\alpha = \{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\}$ ou si $\mathrm{w} = c^2$ (collapse gravitationnel).

Il s'ensuit que la chiralité d'une zéro-particule s'annule si sa vitesse est orthogonale à la vitesse de rotation de l'espace, ou en présence d'un collapse gravitationnel. [2]

Du fait que $\mathrm{w} = c^2(1 - e_{(0)})$ et $v_i = -c\, e_{(i)} \cos(x^0; x^i)$, sont exprimés sous forme d'un repère naturel, la condition de dégénérescence $\mathrm{w} + v_i u^i = c^2$ s'écrira

$$c\, e_{(0)} = -\, e_{(i)} u^i \cos(x^0; x^i)\,. \tag{4.17}$$

On sait que la dimension d'un espace est définie par le nombre de ses vecteurs linéairement indépendants. Dans notre formule (4.17), qui est la transcription de $\mathrm{w} + v_i u^i = c^2$, le vecteur repère temporel est linéairement dépendant de tous les vecteurs repère spatiaux. Il s'agit là d'une dégénérescence de fait de l'espace-temps. Notre formule (4.17) peut donc être considérée comme une *condition géométrique de dégénérescence*.

Dans le cas d'un collapse gravitationnel ($\mathrm{w} = c^2$), la longueur du vecteur repère temporel $e_{(0)} = 1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}$ s'annule. En l'absence de champs de gravitation ($\mathrm{w} = 0$) ou dans un champ faible ($\mathrm{w} \to 0$) la grandeur $e_{(0)}$ atteint son maximum égal à 1. Pour les cas intermédiaires, $e_{(0)}$ décroit en raison inverse du champ gravitationnel.

Comme on sait, en chaque point de l'espace-temps, il existe un *cône isotrope*, une hypersurface dont l'équation est

$$g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = 0\,. \tag{4.18}$$

Géométriquement parlant il s'agit d'une région qui caractérise les particules du genre lumière. Puisque son intervalle d'espace-temps est

2. Ceci en raison du fait que le module de la vitesse des coordonnées de la particule s'annule sous la condition de collapse gravitationnel ($u = 0$).

nul, toutes les directions de cette région sont équivalentes (elles sont donc isotropes). Par définition, cette région qui abrite les particules du genre lumière, est communément appelée *cône de lumière*.

Etant donné que la métrique du zéro-espace est également nulle (4.13), un cône isotrope peut être aussi construit en chacun de ses points. Un tel cône est décrit par une équation quelque peu différente

$$\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 - g_{ik}\, dx^i dx^k = 0\,. \tag{4.19}$$

La différence entre ce cône et le cône de lumière est qu'il satisfait à la condition

$$1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2} = \frac{v_i u^i}{c^2}\,, \tag{4.20}$$

qui est uniquement caractéristique d'un espace-temps dégénéré (zéro-espace). Nous l'appellerons donc le *cône isotrope dégénéré*. Puisque le terme spécifique (4.20) est fonction de la rotation d'espace, le cône isotrope dégénéré est un cône en rotation.

En présence d'un collapse gravitationnel, $\mathrm{w} = c^2$, le premier terme de (4.20) est égal à zéro (le point d'arrêt de la coordonnée temporelle), tandis que le second terme restant $g_{ik}\, dx^i dx^k = 0$ décrit une hypersurface spatiale dégénérée. Par contre, si $\mathrm{w} = 0$, $v_i u^i = 0$, et l'équation du cône dégénéré (4.20) devient

$$c^2 dt^2 - g_{ik}\, dx^i dx^k = 0\,, \tag{4.21}$$

c'est-à-dire que la coordonnée temporelle s'écoule uniformément de la même manière.

Plus le potentiel gravitationnel w est élevé, plus la dégénérescence du cône est sévère. Dans le cas ultime où $\mathrm{w} = c^2$, le cône s'applatit sur l'espace spatial (collapses). Le cône le plus "lumineux" $\mathrm{w} = 0$ est celui qui est le plus éloigné de la section spatiale.

Dans une région du zéro-espace, un collapsar est donc assimilable au zéro-espace que nous percevons en tant qu'observateur standard. En d'autres termes, pour nous, le zéro-espace tout entier est un état dégénéré de notre espace-temps régulier, alors que pour un zéro-observateur, un collapsar gravitationnel est l'état dégénéré du zéro-espace. C'est dire encore qu'un cône isotrope de lumière contient un cône isotrope dégénéré de l'ensemble du zéro-espace, qui à son tour contient un cône particulier dégénéré d'un collapsar donc en effondrement gravitationnel dans le zéro-espace. Nous avons donc ici une illustration de la structure fractale de l'Univers, dans une représentation de cônes isotropes emboités.

§4.3 Le zéro-espace en tant que domaine des particules virtuelles. Interprétation géométrique des diagrammes de Feynman

Il est bien connu que le diagramme de Feynman est une représentation graphique des différentes interactions entre particules élémentaires. Ces graphiques montrent clairement que les porteurs d'interactions sont des particules virtuelles.

En d'autres termes, presque tous les processus physiques reposent sur l'émission et l'absorption de particules virtuelles (par ex. les photons) par les particules réelles de notre Univers. Une autre propriété notable des diagrammes de Feynman montre qu'ils sont capables de décrire en même temps des particules (par ex. électrons) et des anti-particules (par ex. positrons). Dans cet exemple, un positron est représenté par un électron qui remonte le temps.

En électrodynamique quantique, on sait que l'interaction des particules en différents points d'embranchement des diagrammes de Feynman conserve l'impulsion quadridimensionnelle. Cette circonstance conduit à suggérer une possible interprétation dans le cadre de la relativité générale.

De fait, dans l'espace pseudo-riemannien de la relativité générale, les définitions suivantes peuvent s'appliquer formellement aux particules suivantes :

1) Particule massive — particule de masse au repos non nulle ($m_0 \neq 0$) dont les trajectoires sont non isotropes ($ds \neq 0$). Celle-ci est du type subluminique (particule réelle), et supraluminique (tachyon). Les particules massives incluent l'option de la particule et de l'anti-particule qui se déplacent respectivement du passé vers le futur, et du futur vers le passé ;
2) Particule dépourvue de masse — particule de masse au repos nulle ($m_0 = 0$), mais de masse relativiste différente de zéro ($m \neq 0$) qui se déplacent le long de trajectoires isotropes ($ds = 0$) à la vitesse de la lumière. Ce sont les particules du genre lumière (par ex. les photons). Les particules sans masse incluent également l'option de la particule et de l'anti-particule ;
3) Zéro-particule — une particule dont les masses au repos et relativistes sont nulles et qui se déplace dans l'espace-temps complètement dégénéré (zéro-espace). Pour un observateur standard situé dans notre Univers, le temps physiquement observable s'interrompt pour les zéro-particules et le couple particule-antiparticule perd alors tout son sens dans ce cas.

Afin de traduire les diagrammes de Feynman en relativité générale, il nous faut redéfinir les particules virtuelles. Pour ce faire, nous procèderons comme suit.

En électrodynamique quantique, contrairement aux particules standard, les particules virtuelles n'obéissent pas à la relation entre l'impulsion et l'énergie

$$E^2 - c^2p^2 = E_0^2\,, \tag{4.22}$$

et où $E = mc^2$, $p^2 = m^2\mathrm{v}^2$, $E_0 = m_0c^2$ ne s'appliquent plus. En d'autres termes pour les particules virtuelles, on a

$$E^2 - c^2p^2 \neq E_0^2\,. \tag{4.23}$$

Dans un espace pseudo-riemannien, la relation (4.22) sous forme chr.inv., offre une présentation analogue

$$p^2 = h_{ik}\,p^ip^k, \tag{4.24}$$

où $p^i = m\mathrm{v}^i$ représente le vecteur d'impulsion physiquement observable chr.inv. de la particule. Divisant alors (4.24) par c^4, on obtient

$$m^2 - \frac{p^2}{c^2} = m_0^2\,, \tag{4.25}$$

c'est-à-dire la formulation chr.inv. de la conservation de la 4-impulsion d'une particule massive réelle

$$P_\alpha P^\alpha = g_{\alpha\beta}\,P^\alpha P^\beta = m_0^2\,g_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = m_0^2 \tag{4.26}$$

parallèlement transportée le long de sa trajectoire toute entière où $ds^2 > 0$, qui est donc subluminique. Pour une particule supraluminique (tachyon), dont la 4-impulsion est

$$P^\alpha = m_0\frac{dx^\alpha}{|ds|}\,, \tag{4.27}$$

la relation chr.inv. (4.25) entre la masse et l'impulsion devient

$$\frac{p^2}{c^2} - m^2 = (im_0)^2\,. \tag{4.28}$$

Pour les particules du genre lumière (photons), la masse au repos est nulle, et la relation entre l'impulsion et la masse est donnée par

$$m^2 = \frac{p^2}{c^2}\,, \tag{4.29}$$

où la masse relativiste m est définie par l'équivalence $E = mc^2$, tandis que l'impulsion physiquement observable $p^i = mc^i$ s'exprime par l'inter-

médiaire du vecteur chr.inv. de la vitesse de la lumière.

En conséquence, les équations (4.25), (4.28), (4.29) caractérisent la relation chr.inv. entre la masse et l'impulsion des particules classiques peuplant l'espace-temps de la relativité générale. Comme les interactions entre particules réelles sont assurées par des particules virtuelles, celles-ci doivent être d'abord décrites géométriquement pour pouvir ensuite définir les diagrammes de Feynnman dans ce même cadre géométrique.

Par définition, la formule chr.inv. (4.25) qui établit la relation observable entre masse et impulsion ne peut s'appliquer aux particules virtuelles. Du point de vue géométrique, ceci traduit le fait que la longueur du 4-vecteur d'impulsion d'une particule virtuelle parallèlement transportée n'est plus conservée le long de sa trajectoire d'Univers. Dans un espace riemannien, et plus particulièrement pseudo-riemannien quadridimensionnel (relativité générale), on sait que cette longueur ne varie pas lors de ce transport.

On en déduit que les particules virtuelles évoluent dans un espace à géométrie non riemannienne c'est-à-dire en dehors de l'espace pseudo-riemannien.

Au §1.4, et sans rapport avec les particules virtuelles, nous avons montré que les trajectoires le long desquelles le carré du vecteur tangent parallèlement transporté ne se conserve pas, se situaient dans le zéro-espace ,espace-temps complètement dégénéré ($g = \det \| g_{\alpha\beta} \| = 0$), alors que dans un espace-temps pseudo-riemannien on a toujours $g < 0$. Donc, l'ensemble du zéro-espace est situé en dehors de l'espace pseudo-riemannien quadridimensionnel, et sa géométrie est différente. Par ailleurs, nous avons montré que les masses relativistes des particules contenues dans le zéro-espace (zéro-particules) étaient nulles, et que par rapport à un observateur standard de notre Univers, leur mouvement était perçu comme instantané (action de longue portée).

La convergence de ces analyses nous conduit à admettre que les zéro-particules peuvent être identifiées aux particules virtuelles dans l'*espace-temps étendu* où $g \leqslant 0$ (un tel espace a été introduit au §1.5). L'espace-temps étendu permet alors une métrique dégénérée et le mouvement de particules massives ou non, ainsi que leurs interactions avec des particules virtuelles (zéro-particules) dans le zéro-espace. On a bien là une interprétation géométrique des diagrammes de Feynman dans le cadre de la théorie de la relativité générale.

En particulier, comme la métrique du zéro-espace $d\mu^2$ (4.9) n'est pas invariante, la longueur d'un 4-vecteur dégénéré parallèlement transporté dans cet espace, n'est plus conservée. Par exemple, pour un vecteur

d'Univers $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}$, on aura

$$U_\alpha U^\alpha = g_{ik}\, u^i u^k = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 \neq const. \tag{4.30}$$

La théorie des observables physiques appliquée à cette situation va une fois encore nous conduire à la solution. Toutes ces grandeurs incluant celles du zéro-espace, peuvent s'exprimer en fonction des caractéristiques physiquement observables (physique classique) de l'espace de référence d'un observateur. Par suite, rapportée à un observateur standard, une zéro-particule possède un vecteur impulsion quadrimensionnel P^α, dont la longueur reste inchangée lors d'un transport parallèle dans son espace (zéro-espace)

$$P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{M}{c}\frac{dx^\alpha}{dt}\,, \qquad P_\alpha P^\alpha = \frac{M^2}{c^2}\frac{ds^2}{dt^2} = 0\,, \tag{4.31}$$

car par définition dans ce dernier, $ds^2 = 0$. D'un autre côté, si nous considérons le référentiel d'un observateur hypothétique situé dans le zéro-espace, c'est-à-dire doué de la métrique $d\mu^2$ (4.9), la longueur du vecteur transporté ne se conserve plus.

Examinons à présent quelles sont les types de particules pouvant être contenues dans le zéro-espace. En premier lieu, nous nous reporterons aux conditions de dégénérescence (1.98) en l'absence de potentiel gravitationnel ($\mathrm{w} = 0$) qui sont

$$v_i u^i = c^2, \qquad g_{ik}\, u^i u^k = c^2, \tag{4.32}$$

c'est-à-dire qu'en l'absence de gravitation, les zéro-particules se déplacent dans le zéro-espace à la vitesse de coordonnées égale à celle de la lumière

$$u = \sqrt{g_{ik} u^i u^k} = c\,, \tag{4.33}$$

et ce, en dépit du fait que leur mouvement semble instantané lorsqu'ils sont vus par un observateur standard comme nous-mêmes, dans notre espace pseudo-riemannien strictement non dégénéré.

La première condition de dégénérescence est celle du produit scalaire de la vitesse linéaire de rotation d'espace et de la vitesse des coordonnées spatiales de la particule

$$v_i u^i = v u \cos\left(v_i; u^i\right) = c^2. \tag{4.34}$$

Comme $u = c$, cette condition est vérifiée pour les vecteurs parallèlement co-orientés, v_i et u^i (ou qui coincident avec eux-mêmes ce qui est le cas présent). En l'absence de gravitation, les zéro-particules se

meuvent donc dans le zéro-espace qui les contient à la vitesse de la lumière, pendant que le zéro-espace lui-même est en rotation à cette même vitesse de la lumière. Nous appellerons de telles particules des *photons virtuels*. La métrique du zéro-espace le long de ces trajectoires est

$$d\mu^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k = c^2 dt^2 \neq 0\,, \tag{4.35}$$

qui est similaire à la métrique $d\sigma^2 = c^2 d\tau^2 \neq 0$ décrivant les photons classiques dans l'espace pseudo-riemannien.

Nous allons maintenant voir quelles sortes de particules peuvent exister dans le zéro-espace en présence d'un champ gravitationnel ($\mathrm{w} \neq 0$). Pour ce cas, les conditions de dégénéréscence (1.98) sont

$$v_i u^i = c^2 - \mathrm{w}\,, \qquad u^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2, \tag{4.36}$$

de telle façon que le produit scalaire $v_i u^i = c^2 - \mathrm{w}$ puisse être représenté par

$$\begin{aligned} v_i u^i &= vu \cos\left(v_i; u^i\right) = \\ &= vc\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) \cos\left(v_i; u^i\right) = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) c^2. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Cette équation est vérifiée car les vecteurs v_i et u^i sont parallèlement co-orientés avec en même temps $v = c$, c'est-à-dire qu'avec la gravitation, les zéro-particules se déplacent dans le zéro-espace qui les contient, à une vitesse dont la valeur est donnée par

$$u = c\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right), \tag{4.38}$$

pendant que le zéro-espace est en rotation à la vitesse de la lumière $v = c$. Revenant alors à la métrique du zéro-espace en présence de gravitation

$$d\mu^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2, \tag{4.39}$$

nous voyons que le paramètre temporel effectif n'est pas une coordonnée de temps mais la variable définie de la façon suivante (celle-ci peut être appelée *temps gravitationnel*, car dépendante du potentiel)

$$t_* = \left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right) t\,, \tag{4.40}$$

c'est-à-dire que la véritable vitesse des coordonnées des zéro-particules le long de telles trajectoires dépend du potentiel gravitationnel

$$u_*^i = \frac{dx^i}{dt_*} = \frac{u^i}{1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}}\,. \tag{4.41}$$

En vertu de la seconde condition de dégénérescence (1.98), la véritable vitesse des coordonnées de ces zéro-particules est égale à la vitesse de la lumière

$$u_*^2 = g_{ik}\, u_*^i u_*^k = \frac{g_{ik}\, dx^i dx^k}{\left(1 - \frac{\mathrm{w}}{c^2}\right)^2} = c^2. \tag{4.42}$$

Ce sont également des *photons virtuels*. D'après la première condition de dégénérescence (1.98), et en présence d'un champ gravitationnel, la véritable vitesse linéaire de rotation du zéro-espace abritant les photons virtuels, est aussi égale à la vitesse de la lumière

$$v_i u_*^i = c^2. \tag{4.43}$$

Il est important de noter que le fait d'envisager des particules massives virtuelles est ici dénué de sens car par définition, toutes les particules qui se situent dans le zéro-espace sont dépourvues de masse au repos, et ne sont donc pas des particules massives.

Nous nous proposons d'étudier ici les particules virtuelles dans une région d'effondrement gravitationnel du zéro-espace ($\mathrm{w} = c^2$). Les particules virtuelles ainsi définies seront appelées *collapsars virtuels*. Pour celles-ci, les conditions de dégénérescence (1.98) deviennent

$$v_i u^i = 0\,, \qquad g_{ik}\, dx^i dx^k = 0\,, \tag{4.44}$$

c'est-à-dire que les collapsars virtuels sont soit au repos par rapport à un observateur du zéro-espace, soit l'Univers environnant de cet observateur se rétrécit jusqu'à un seul point $dx^i = 0$, soit encore la 3-métrique spatiale du zéro-espace effondré est dégénérée $g_{(3\mathrm{D})} = \det \| g_{ik} \| = 0$. La métrique du zéro-espace le long des trajectoires des collapsars virtuels est

$$d\mu^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k = 0\,. \tag{4.45}$$

Il existe ainsi deux types de particules virtuelles pouvant exister dans un zéro-espace qui est un espace-temps quadridimensionnel dégénéré :

1) Les photons virtuels — leur mouvement en avant s'effectue à la vitesse de la lumière, qui est aussi la vitesse de rotation du zéro-espace où ils évoluent ;

2) Les collapsars virtuels au repos par rapport au zéro-espace.

La métrique du zéro-espace $d\mu^2$ (4.9) n'est pas invariante $d\mu^2 \neq inv$. Il en résulte que pour un observateur hypothétique situé dans cet espace, la longueur d'un 4-vecteur dégénéré parallèlement transporté, ne se conserve pas : $U_\alpha U^\alpha \neq const$ (4.30). Par suite, la relation classique entre

l'énergie et l'impulsion $E^2 - c^2p^2 = const$, n'est pas applicable aux zéro-particules, mais on établit une autre relation du type $E^2 - c^2p^2 \neq const$. Cette dernière propriété fondamentale caractérisant les particules virtuelles, nous en concluons que :

> Les zéro-particules peuvent jouer le rôle de particules virtuelles, lesquelles, en accord avec l'Electrodynamique quantique, sont des porteurs matériels de l'interaction entre deux particules classiques de notre Univers. Dans ce cas, l'ensemble du zéro-espace constitue une "zône d'échange tampon" ayant la capacité d'assurer les interactions entre les particules massives classiques, et celles sans masse à l'intérieur de notre Univers.

En définitive, nous en concluons que toutes les interactions entre particules massives classiques et particules dépourvues de masse qui se produisent dans l'espace-temps de la relativité générale, (espace-temps pseudo-riemannien), sont caractérisées par une *zône d'échange tampon* que constitue ce zéro-espace. Les porteurs de l'interaction matérielle dans cette zône sont précisément les deux types de particules virtuelles mentionnées précédemment.

Au §1.5 du Chapitre 1, lorsque nous avons considéré le dualisme onde-particule, nous en avons déduit que l'équation d'Eikonale pour les zéro-particules est une équation d'onde stationnaire pour la lumière figée (1.122). Par conséquent, les particules virtuelles sont en réalité des *ondes stationnaires lumineuses*, et l'interaction entre les particules régulières de notre espace-temps classique est transmis par l'intermédiaire d'un système *d'ondes stationnaires du genre lumière* (*hologrammes lumineux stationnaires*) qui emplit la zône d'échange tampon (zéro-espace).

L'ensemble de ces résultats demeure actuellement la seule explication plausible qui puisse décrire les particules virtuelles et leurs modes d'interaction dans le cadre de la théorie de la relativité générale telle qu'elle a été établie par Einstein.

§4.4 Lumière figée : les zéro-particules observées en tant qu' ondes stationnaires lumineuses

Ce court paragraphe a été ajouté à la suite de notre dernière publication [36], où nous avons introduit une théorie de la lumière figée, dans le cadre de la relativité générale. Cette même théorie a été également présentée à l'assemblée de l'American Physical Society, qui s'est tenue du 21 au 25 Mars 2011, à Dallas, Texas [37].

Au cours de l'été 2000, Lene V. Hau, qui fût le précurseur des expérimentations portant sur le ralentissement de la lumière dans les

années1990 à l'Université de Harvard, parvint le premier à obtenir un état de lumière au repos. Dans son expérience, la lumière fût stockée pendant quelques millisecondes, dans des atomes de sodium à ultra basse température, (dans un nuage gazeux d'atomes approximativement refroidi à un millionième du 0 degré absolu). Un tel état a été désigné par le terme de *lumière figée* ou *lumière interrompue*. Une anthologie des expérimentations initiales est présentée dans ses publications [38–42]. A la suite de ses premiers succès de 2000, Lene Hau poursuit toujours ses recherches : en 2009, la propagation de la lumière fût stoppée pendant 1.5 sec dans son laboratoire [43].

Au bout d'un an, le constat de lumière figée était alors validé par deux autres groupes de chercheurs, Une équipe conduite par Ronald L. Walsworth et Mikhail D. Liukin du Havard-Smithsonian Center for Astrophysics, parvinrent à stopper la lumière dans un gaz à température ambiante [44]. Dans d'autres expériences menées par Philip R. Hemmer à l'Air Force Research Laboratory de Hanscom (Massachusetts), la propagation lumineuse fût stoppée dans un solide ultra refroidi [45].

Les meilleures études expérimentales sur le sujet ont été publiées en 2001, dans l'article *Frozen Light* de Lene Hau, paru d'abord dans *Scientific American* [41]. Puis, une version complétée de cet article a été ré-imprimée en 2003, dans une édition spéciale de ce même journal [42].

Par ailleurs, ce problème de la lumière figée avait déjà fait l'objet de notre étude théorique dans les années 1990, tout à fait indépendamment des expériences menées (dont nous n'avons pris connaissance qu'en janvier 2001, date à laquelle la presse scientifique en eut largement diffusé les résultats positifs). Notre tâche consistait alors à révéler les types de particules qui peuplaient l'espace (espace-temps) de la relativité générale. Nous avions obtenu qu'en dehors des particules avec et sans masse (du genre lumière), pouvaient également exister celles du troisième type. Ces dernières appartiennent à l'espace dont la métrique est complètement dégénérée, constituant ainsi le cas limite (ou ultime) des particules de l'espace (particulièrement dégénéré) du genre lumière. Une telle particule représente ainsi le cas ultime du photon. Nous avons en outre démontré que du point de vue d'un observateur classique, un nombre de ce type de particules, est perçue comme un système d'ondes lumineuses stationnaires (ou en d'autres termes, une lumière figée).

L'ensemble de ces résultats théoriques a été parmi d'autres, présenté dans la première édition de ce livre d'abord publiée en 2001, et dans une seconde ré-imprimée en 2008. Malgré tout, ces deux éditions traitaient surtout de problèmes annexes (tels que l'équation du mouvement, le collapse gravitationnel et autres), relatifs aux particules en général, de

sorte que les discussions sur le sujet actuel, se trouvaient dispersées dans le texte. C'est pourquoi, nous avons décidé de regrouper ici nos analyses, afin de fournir une description complète de notre théorie de la lumière figée.

Ainsi que nous l'avons montré au §1.5, l'équation d'Eikonale des zéro-particules est une équation d'ondes stationnaires : voir équation (1.122) sur le sujet. Cette circonstance et celle des zéro-particules comme cas ultime des particules du genre lumière, nous permet de conclure sur une façon possible de mesurer expérimentalement les zéro-particules :

> Du point de vue d'un observateur classique, les zéro-particules apparaissent comme des *ondes lumineuses stationnaires* — en d'autres termes, un arrêt de l'onde lumineuse. Par conséquent, l'ensemble du zéro-espace apparaît empli d'ondes stationnaires lumineuses (hologramme du genre lumière).

Pour un observateur classique, les zéro-particules devraient donc se manifester sous la forme d'ondes lumineuses stationnaires — des ondes de lumière interrompue. Ce dernier mode concorde avec ce qui a été mesuré lors des expériences de la lumière figée : un faisceau de lumière interrompu est "stocké" dans une vapeur atomique, et demeure invisible à l'observateur jusqu'au moment où elle est de nouveau relâchée pour reprendre son "état de parcours" initial (voir plus haut, ainsi que les rapports d'expériences originaux).

On peut en déduire que les expérimentations initiées à Harvard, par Lene Hau, constitue un "avant propos" à la découverte des zéro-particules, et donc à l'éventualité de la téléportation non quantique.

De fait, la lumière figée peut s'apparenter à nouvel état de la matière qui diffère des états solide, gazeux liquide, ou de plasma.

§4.5 Conclusions

La structure géométrique de l'espace quadridimensionnel (espace-temps), de la relativité générale permet donc la possibilité d'admettre des particules qui sont des cas limites de photons, et dotées de masse au repos nulle (comme les photons), mais dont la masse relativiste est également nulle. Nous les désignons sous le terme de *zéro-particules*. De telles particules appartiennent à un espace doué d'une métrique entièrement dégénérée, qui représente le cas limite de l'espace (particulièrement dégénéré) du genre lumière. Autrement dit, ces particules sont des photons complètement dégénérés.

Les zéro-particules peuvent appartenir à deux régions à la fois classique, et en effondrement gravitationnel de l'espace complètement dé-

généré. Dans ce dernier cas, elles n'existent que sous la condition de collapse gravitationnel. L'espace complètement dégénéré ressemble à un volume local, dans lequel tous les intervalles de temps observables et intervalles tridimensionnels spatiaux observables, sont identiquement nuls. Dès qu'un photon pénètre à travers la "porte" du zéro-espace en un point de notre espace classique, il peut être instantanément connecté à un autre photon qui est entré dans une "porte" analogue par un autre point. Il s'agit là d'une forme de *téléportation non quantique* des photons. Parallèlement, la relation classique entre l'énergie et l'impulsion n'est plus vraie pour les zéro-particules. Il s'ensuit que les zéro-particules peuvent jouer un rôle de particules virtuelles qui représentent les porteurs matériels de l'interaction entre les particules classiques de notre Univers.

Conclusions

A partir de ce qui précède, nous pouvons maintenant obtenir une image claire de la typologie des particules qui son théoriquement envisageables dans l'espace-temps quadridimensionnel de la relativité générale.

Nous avons résolu ce problème au moyen de l'appareil mathématique des grandeurs physiquement observables (invariant chronométriques). L'essence de cette méthode développée par Abraham Zelmanov, est simple. Ainsi que nous le savons, les composantes d'une quantité tensorielle sont déterminées dans un système idéal d'axes orthogonaux, (rectilinéaires), qui sont tangents à l'origine des coordonnées, aux axes réels (curvilinéaires). L'espace-temps réel peut être alors imaginé comme un ensemble de sections spatiales courbes (espaces tridimensionnels), "percés" en chaque point par les axes de temps non uniformes. En projetant une grandeur quadridimensionnelle à la fois sur la ligne de temps et sur la section spatiale d'un observateur, on obtient des quantités qu'il mesure. Puisque la projection s'effectue dans l'espace réel, le résultat de ces mesures va dépendre des propriétés de cet espace, comme sa rotation, déformation ou courbure, etc... Depuis les années 1950, de nombreuses expériences ont mis en évidence l'impact significatif des propriétés de l'espace sur la mesure des longueurs et du temps. La plus impressionnante de toutes, est très certainement celle menée lors des vols sans escale autour du globe terrestre, dans les années 1970 (expérience de Hafele-Keating).

Nous avons démontré que la méthode mathématique des invariants chronométriques présente deux cas de figure, qui ne peuvent pas être analysés selon la méthode covariante générale : a) "séparation" de l'espace-temps en une région où le temps s'écoule du passé vers le futur (notre Univers), et une deuxième région où le temps s'écoule en sens inverse (Univers miroir) ; b) une autre région dans laquelle l'intervalle quadridimensionnel, l'intervalle tridimensionnel observable ainsi que l'intervalle de temps observable, sont tous nuls (zéro-espace).

Considérons d'abord le premier cas. La masse relativiste m est la projection scalaire observable du 4-vecteur impulsion de la particule massive, tandis que la fréquence relativiste ω est la projection scalaire observable du 4-vecteur d'onde d'une particule sans masse (du genre lumière). Les particules dont les masses relativiste sont positives $m > 0$, appartiennent à notre Univers, où par rapport à un observateur classique, elles se déplacent du passé vers le futur réalisant ainsi l'écoulement du

temps direct. Les particules de masse relativiste négative $m < 0$, appartiennent à l'Univers miroir, où de notre point de vue, elles se déplacent du futur vers le passé, réalisant alors un écoulement inverse du temps. Tous ces évènements ont lieu à "l'intérieur" du cône de lumière, où la condition $c^2 d\tau^2 = d\sigma^2 \neq 0$ est partout vérifiée. Les projections spatiales et temporelles des coordonnées quadridimensionnelles sont donc égales et non nulles, bien que l'intervalle d'espace-temps soit dégénéré $ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 = 0$. C'est le domaine occupé par les particules sans masse (du genre lumière) comme les photons. Les particules du genre lumière appartenant à notre Univers, possèdent des fréquences positives $\omega > 0$; elles se meuvent du passé vers le futur. Dans l'Univers miroir, les particules du genre lumière ont des fréquences négatives $\omega < 0$, et de notre point de vue, elles se déplacent du futur vers le passé.

De plus, nous avons trouvé que les équations chronométriquement invariantes (observables) du mouvement des particules de notre Univers, et celles des particules de l'Univers miroir, étaient asymétriques, c'est-à-dire que le mouvement observable de ces particules, est différent selon qu'il s'effectue vers le futur ou dans le passé. Ce qui signifie que les condition physiques du déplacement dans le passé ou vers le futur, diffèrent entre elles. Cette asymétrie dépend seulement des propriétés de l'espace-temps, telles que la force d'inertie gravitationnelle, la rotation d'espace et sa déformation.

Si le temps physiquement observable τ, était indiscernable de la coordonnée de temps t, (ils ne diffèrent que par la présence du potentiel de gravitation et de la rotation d'espace), il serait impossible d'envisager les problèmes relatifs aux régions d'espace-temps à écoulement temporel direct ou indirect.

Ceci nous amène à une question importante. Considérons quatre axes de coordonnées indépendants — un axe du temps et trois axes spatiaux. Du point de vue géométrique, les deux orientations possibles le long de l'axe temporel sont théoriquement égales. De ce fait, l'asymétrie évoquée plus haut n'est-elle pas contradictoire ? Il n'en est rien. Bien entendu, si la section spatiale (espace tridimensionnel) est uniforme et isotrope, les deux directions temporelles sont équivalentes. Mais dès que cette section spatiale se déforme ou entre en rotation, (à la façon d'un papier chiffonné qui tournerait autour d'un axe), l'espace-temps devient anisotrope par rapport à la ligne du temps. Cette anisotropie est responsable de la disparité des conditions physiques du mouvement vers le futur et dans le passé.

De plus, si on aborde le mouvement des particules sous l'aspect ondulatoire, (dans le cadre du dualisme onde-particule introduit par De

Broglie), aucune asymétrie n'est observée : la propagation des ondes est identique dans les deux orientations temporelles, à l'inverse de celle des "particules pleines".

Il en résulte que dans notre espace-temps réel, nous devrions avoir deux régions quadridimensionnelles distinctes : notre Univers caractérisé par un écoulement du temps direct, et l'Univers miroir, où de notre point de vue, le temps s'écoule en sens inverse. Ces deux régions sont séparées par une membrane d'espace-temps au niveau de laquelle, par rapport à un "observateur extérieur" situé dans notre Univers ou l'Univers miroir, le temps observable s'arrête $d\tau = 0$.

La nature de cette membrane est-elle simplement celle d'une frontière entre les deux Univers ? La méthode des grandeurs physiquement observables, fournit alors les résultats suivants. A l'intérieur de la membrane séparant les deux Univers, s'applique la condition restrictive $d\tau = 0$ c'est-à-dire que le temps observable est dégénéré. Ceci révèle deux cas de figure pour l'intervalle quadridimensionnel $ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2$ dans la région d'espace-temps occupée par la membrane : a) $d\tau = 0$, alors que $d\sigma \neq 0$ et $ds^2 = -d\sigma^2 \neq 0$, de sorte que nous observons cette membrane d'espace-temps comme un espace tridimensionnel contenant les particules massives dont les processus physiques sont interrompus ; b) $d\tau = 0$, avec $d\sigma = 0$ et $ds^2 = 0$. Ce deuxième cas révèle la dégénérescence simultanée du temps physiquement observable $d\tau$, de la métrique quadridimensionnelle $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$, et de la métrique tridimensionnelle $d\sigma^2 = h_{ik}\, dx^i dx^k$. Sur le plan mathématique, cette circonstance signifie que la région d'espace-temps est *complètement dégénérée*. Cette partie de la membrane d'espace-temps doit être envisagée comme l'ensemble d'une région tridimensionnelle, qui se réduit à un point, en dépit du fait que l'intervalle de la coordonnée temporelle dt, et la métrique tridimensionnelle $d\mu^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k$, soient non dégénérés dans cette région.

Qu'est ce qu'un espace-temps complètement dégénéré, et contient-il des particules ? La théorie généralement covariante qui est indépendante des systèmes de coordonnées, fournit zéro réponse, et les données du problème apparaissent donc dénuées de sens. C'est pourquoi nous avons appelé *zéro-espace*, un espace-temps ou une de ses régions complètement dégénérée, tirée de l'espace classique non dégénéré. Ce faisant, la méthode des grandeurs physiquement observables liées à un système de référence et à ses propriétés, nous permet de "voir" les évènements à l'intérieur d'un zéro-espace. Par suite, nous avons montré que tout zéro-espace contient un Univers entier avec ses propres coordonnées, trajectoires et particules (*zéro-particules*). Par contre, en raison de la structure géométrique de l'espace-temps quadridimensionnel, un observateur

classique rattaché à la terre, voit l'ensemble du zéro-espace se réduire à un point où le temps observable s'arrête. Ce qui ne veut pas dire que l'on passe de notre Univers vers le zéro-espace à travers un simple point. Bien au contraire, l'entrée peut s'effectuer en n'importe quel point. Les condition physiques de dégénérescence dans l'espace local de l'objet rentrant, nécessitent une combinaison du potentiel gravitationnel w, de la vitesse linéaire de rotation d'espace v_i, et de la vitesse de pénétration de l'objet u^i, qui prend finalement la forme $w + v_i u^i = c^2$. Dans un cas bien particulier, à savoir en l'absence de rotation de l'espace local de l'objet ou si celui-ci est au repos, la condition de dégénérescence coincïde avec la condition du collapse gravitationnel $w = c^2$: la possibilité de pénétrer dans un zéro-espace est donc également envisageable à partir de l'état de collapse gravitationnel.

Etant donné que vu de notre Univers, les intervalles temporel et spatiaux observables sont nuls, et que les zéro-particules se déplacent instantanément par rapport à un observateur classique, il s'agit là, d'une *action à longue portée*. Dans notre Univers, ce mode d'action des particules est impossible. Mais si l'interaction entre deux particules de notre Univers est transmis par l'intermédiaire d'une région du zéro-espace (au moyen des échanges de zéro-particules), l'action à longue portée devient possible : dans ce cas, le temps observé entre l'émission et la réception d'un signal est égale à zéro.

Une étude plus poussée, permet de montrer que les zéro-particules possèdent également une masse et une fréquence, mais pour pouvoir les observer, il est nécessaire d'entrer dans le zéro-espace lui-même.

A quoi ressemblent les zéro-particules vues par un observateur situé dans dans notre Univers ? Peut-on détecter ces particules dans une expérience ? Nous avons déjà analysé ce problème dans le cadre du dualisme onde-particule conceptualisé par De Broglie. Nous avons alors trouvé que l'équation de la phase de l'onde (Eikonale), des zéro-particules est une équation d'ondes stationnaires.Autrement dit, de notre point de vue, les zéro-particules nous apparaissent comme des ondes stationnaires lumineuses — les ondes de "lumière interrompue". Par suite, l'ensemble du zéro-espace est empli d'ondes stationnaires lumineuses, ou en d'autres termes, d'hologrammes stationnaires lumineux. Il est très possible que "les expériences de lumière interrompue" menées à Harvard, par Lene Hau, et vérifiées indépendamment par d'autres chercheurs, ne soient que le "prélude" à la découverte des zéro-particules.

En l'état de la science actuelle, les seules particules pour lesquelles la relation classique entre l'énergie et l'impulsion ne s'applique pas, sont les particules virtuelles. Selon les concepts établis basés sur des données

expérimentales, ce type de particules est responsable de l'interaction entre deux particules observables (massives ou du genre lumière). L'interprétation est ici sans ambiguïté : a) les zéro-particules sont ces particules virtuelles porteurs de l'interaction entre deux particules observables (massives ou du genre lumière), b) le zéro-espace est une région de l'espace-temps qui abrite ces particules virtuelles, et constitue en même temps la membrane entre notre Univers et l'Univers miroir.

Le collapse gravitationnel est également admis dans l'Univers miroir. Avec l'accroissement du potentiel de gravitation w, on effectue une sorte de "descente" dans le tunnel du zéro-espace jusqu'à ce que w coincïde avec c^2, et nous nous retrouvons alors dans un collapsar gravitationnel. Du point de vue d'un observateur hypothétique situé dans le zéro-espace, la surface de ce collapsar se rétrécit jusqu'à un simple point $g_{ik}\,dx^i dx^k = 0$, constituant ainsi la matière des collapsars dégénérés qui, contrairement aux collapsars classiques, se situe dans le zéro-espace.

Mais il y a plus. Un zéro-espace ne peut exister en présence de rotation d'espace, que si la condition $\mathrm{w} + v_i u^i = c^2$ est vérifiée. En l'absence de rotation, le zéro-espace s'effondre constamment : dans ce cas, le collapsar gravitationnel se dilate jusqu'à occuper totalement le zéro-espace tout entier. En cas d'absence simultanée de potentiel de gravitation et de rotation d'espace, l'entrée à travers la membrane d'espace-temps est impossible, et toute connexion entre notre Univers et l'Univers miroir, est interdite.

D'une façon générale, une telle approche purement géométrique, traduit le fait que de toutes les propriétés des particules qui peuplent l'Univers matériel, l'Univers du genre lumière, et le zéro-Univers, ne sont en réalité que la conséquence de la structure géométrique de ces régions d'espace-temps.

L'ensemble des résultats présentés ici ont tous été obtenus au moyen de la méthode des grandeurs physiquement observables de Zelmanov (invariants chronométriques). La méthode généralement covariante n'a été, et ne sera d'aucune utilité dans le cadre de notre étude.

Nous voyons finalement que la science contemporaine ignore encore énormément de conséquences physiques potentiellement engendrées par la relativité générale. Les prochaines observations astronomiques associées aux expérimentations physiques, devraient néanmoins révéler de nouveaux phénomènes, liés en particulier à l'accélération, la rotation, la déformation et la courbure de l'espace local de référence (laboratoire), qui ont fait l'objet détaillé du présent ouvrage.

Epilogue

Il y a un peu plus de 40 ans, dans le roman *L'Arc-en-Ciel Lointain*, écrit par Arkadi et Boris Strougatski (1963, et traduit du Russe par Svetlana Delmotte), un personnage se souvient...

> "...Lorsque qu'il était écolier, le problème suivant le fascinait : déplacer instantanément des objets à travers le vaste espace. Le concept recherché contredisait alors les principes communément admis qui se référaient à l'espace absolu, l'espace-temps, ou le Kappa-espace... A l'époque, on le définissait encore comme un "feuillet Riemannien chiffonné". Plus tard, on le baptisa "hyper-infiltration", "sigma-inflitration", ou "zéro-contraction". A la longue, on finit par l'appeler "zéro-transport" ou en abrégé, "zéro-T", ce qui entraînera ensuite le "zéro-T-équipement", les "zéro-T-problèmes", le "zéro-T- testeur", le "zéro-T-physicien".
>
> — Qu'est ce que vous faites ?
>
> — Je suis un "zéro-physicien".
>
> Regard emprunt de surprise et admiratif.
>
> — Pardonnez moi, mais pourriez vous m'expliquer ce qu'est la zéro-physique ?
>
> — Je n'y comprend rien."

Ce passage pourrait constituer une bonne conclusion à notre étude. Dans les années 60, des mots comme "zéro-espace" ou "zéro transport", semblaient provenir directement de la Science-Fiction, ou contribuaient éventuellement à un apport imaginatif aux générations actuelles.

Mais la science progresse plus vite qu'on ne le pense. Les résultats obtenus dans ce livre, suggèrent que la variété des particules existantes et des types de leurs interactions, ne se limite pas à celle des particules reconnues par la physique contemporaine. On doit ainsi s'attendre à ce que les avancées technologiques expérimentales, mettent en évidence les zéro-particules appartenant à l'espace-temps dégénéré (zéro-espace), et qui sont observables sous la forme d'ondes de "lumière figée" (ondes lumineuses stationnaires). Du point de vue d'un observateur classique, le déplacement des zéro-particules est instantané (en dépit du fait qu'elles se meuvent à la vitesse de la lumière dans le zéro-espace), et donc elles réalisent bien le zéro-transport.

Ici, nous sommes persuadés que ce serait une erreur de croire ou d'accepter que la plupart des lois de la nature ont déjà été toutes

dévoilées par la science contemporaine. Il semblerait au contraire, que nous sommes au tout début d'une très longue route qui nous mène à un Univers inconnu.

<u>**Annexe A**</u>

Annexe A Notations d'algèbre et analyse tensorielles

Différentielle ordinaire d'un vecteur :

$$dA^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\sigma}\, dx^\sigma .$$

Différentielle absolue d'un vecteur contravariant :

$$\mathrm{D}A^\alpha = \nabla_\beta\, A^\alpha dx^\beta = dA^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\, A^\mu dx^\beta .$$

Différentielle absolue d'un vecteur covariant :

$$\mathrm{D}A_\alpha = \nabla_\beta\, A_\alpha dx^\beta = dA_\alpha - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, A_\mu dx^\beta .$$

Dérivée absolue d'un vecteur contravariant :

$$\nabla_\beta\, A^\alpha = \frac{\mathrm{D}A^\alpha}{dx^\beta} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\, A^\mu .$$

Dérivée absolue d'un vecteur covariant :

$$\nabla_\beta\, A_\alpha = \frac{\mathrm{D}A_\alpha}{dx^\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, A_\mu\, .$$

Dérivée absolue d'un tenseur contravariant de second rang :

$$\nabla_\beta\, F^{\sigma\alpha} = \frac{\partial F^{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\, F^{\sigma\mu} + \Gamma^\sigma_{\beta\mu}\, F^{\alpha\mu} .$$

Dérivée absolue d'un tenseur covariante de second rang :

$$\nabla_\beta\, F_{\sigma\alpha} = \frac{\partial F_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\, F_{\sigma\mu} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta}\, F_{\alpha\mu}\, .$$

Divergence absolue d'un vecteur :

$$\nabla_\alpha\, A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma}\, A^\sigma .$$

Divergence chr.inv. d'un vecteur chr.inv. :

$$^*\nabla_i\, q^i = \frac{^*\partial q^i}{\partial x^i} + q^i \frac{^*\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^i} = \frac{^*\partial q^i}{\partial x^i} + q^i \Delta^j_{ji}\, .$$

Divergence physique chr.inv. :

$$^*\widetilde{\nabla}_i\, q^i = {}^*\nabla_i\, q^i - \frac{1}{c^2}\, F_i\, q^i.$$

Opérateur de d'Alembert covariant :

$$\Box = g^{\alpha\beta}\, \nabla_\alpha \nabla_\beta\, .$$

Opérateur de Laplace ordinaire :

$$\Delta = -\, g^{ik}\, \nabla_i \nabla_k\, .$$

Opérateur de Laplace chr.inv. :

$$^*\Delta = h^{ik}\, {}^*\nabla_i\, {}^*\nabla_k\, .$$

Dérivée chr.inv. par rapport à la coordonnée temporelle, et par rapport aux coordonnées spatiales :

$$\frac{^*\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial}{\partial t}\, , \qquad \frac{^*\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2}\, v_i\, \frac{^*\partial}{\partial t}\, .$$

Carré de la vitesse physiquement observable :

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_i\, \mathrm{v}^i = h_{ik}\, \mathrm{v}^i \mathrm{v}^k.$$

Vitesse linéaire de rotation d'espace :

$$v_i = -\, c\, \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}\, , \quad v^i = -\, c\, g^{0i} \sqrt{g_{00}}\, , \quad v_i = h_{ik}\, v^k.$$

Carré de v_i : compte tenu de $g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta} = g_\alpha^\beta$, si $\alpha = \beta = 0$ on a $g_{0\sigma} g^{\sigma 0} = \delta_0^0 = 1$, et $v^2 = v_k v^k = c^2 (1 - g_{00}\, g^{00})$, c'est-à-dire

$$v^2 = h_{ik}\, v^i v^k.$$

Les déterminants des tenseurs métriques $g_{\alpha\beta}$ et $h_{\alpha\beta}$, sont reliés par :

$$\sqrt{-\, g} = \sqrt{h}\, \sqrt{g_{00}}\, .$$

Dérivée par rapport à l'intervalle de temps physiquement observable :

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{^*\partial}{\partial t} + \mathrm{v}^k\, \frac{^*\partial}{\partial x^k}\, .$$

Dérivée première par rapport à l'intervalle d'espace-temps :

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}\, \frac{d}{d\tau}\, .$$

Dérivée seconde par rapport à l'intervalle d'espace-temps :

$$\frac{d^2}{ds^2} = \frac{1}{c^2 - \mathrm{v}^2}\frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{1}{(c^2-\mathrm{v}^2)^2}\left(D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k + \mathrm{v}_i\frac{d\mathrm{v}^i}{d\tau} + \frac{1}{2}\frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial x^m}\,\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k\mathrm{v}^m\right)\frac{d}{d\tau}\,.$$

Tenseur métrique chr.inv.

$$h_{ik} = -\,g_{ik} + \frac{1}{c^2}\,v_i v_k\,, \quad h^{ik} = -\,g^{ik}, \quad h^k_i = \delta^k_i\,.$$

Relations de Zelmanov, entre les symboles de Christoffel usuels, et les caractéristiques chr.inv. de l'espace de référence :

$$D^i_k + A^{\cdot i}_{k\cdot} = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}\left(\Gamma^i_{0k} - \frac{g_{0k}\Gamma^i_{00}}{g_{00}}\right),$$

$$g^{i\alpha}g^{k\beta}\Gamma^m_{\alpha\beta} = h^{iq}h^{ks}\Delta^m_{qs}\,, \quad F^k = -\,\frac{c^2\,\Gamma^k_{00}}{g_{00}}\,.$$

1ère identité et 2ème identité de Zelmanov :

$$\frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{{}^*\partial F_k}{\partial x^i} - \frac{{}^*\partial F_i}{\partial x^k}\right) = 0\,,$$

$$\frac{{}^*\partial A_{km}}{\partial x^i} + \frac{{}^*\partial A_{mi}}{\partial x^k} + \frac{{}^*\partial A_{ik}}{\partial x^m} + \frac{1}{2}\left(F_iA_{km} + F_kA_{mi} + F_mA_{ik}\right) = 0\,.$$

Dérivée de v^2 par rapport au temps physiquement observable :

$$\frac{d}{d\tau}\left(\mathrm{v}^2\right) = \frac{d}{d\tau}\left(h_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k\right) = 2D_{ik}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k + \frac{{}^*\partial h_{ik}}{\partial x^m}\,\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k\mathrm{v}^m + 2\,\mathrm{v}_k\frac{d\mathrm{v}^k}{d\tau}\,.$$

Tenseur complètement antisymétrique chr.inv. :

$$\varepsilon^{ikm} = \sqrt{g_{00}}\,E^{0ikm} = \frac{e^{0ikm}}{\sqrt{h}}\,, \quad \varepsilon_{ikm} = \frac{E_{0ikm}}{\sqrt{g_{00}}} = e_{0ikm}\sqrt{h}\,.$$

Annexe B

Solution exacte pour un détecteur d'ondes gravitationnelles

(Une thèse présentée à la réunion d'Avril 2008 de l'American Physical Society)

2008 APS April Meeting
April 12–15, 2008, St. Louis, Missouri

Exact Solution for a Gravitational Wave Detector — *by Dmitri Rabounski and Larissa Borissova* — The experimental statement on gravitational waves proceeds from the equation for deviating geodesic lines and the equation for deviating non-geodesics. Weber's result was not based upon an exact solution to the equations, but on an approximate analysis of what could be expected : he expected that a plane weak wave of the space metric may displace two resting particles with respect to each other. In this work, exact solutions are presented for the deviation equation of both free and spring-connected particles. The solutions show that a gravitational wave may displace particles in a two-particle system only if they are in motion with respect to each other or the local space (there is no effect if they are at rest). Thus, gravitational waves produce a parametric effect on a two-particle system. According to the solutions, an altered detector construction can be proposed such that it might interact with gravitational waves : 1) a horizontally suspended cylindrical pig, whose butt-ends have basic relative oscillations induced by a laboratory source ; 2) a free-mass detector where suspended mirrors have laboratory induced basic oscillations relative to each other.

Annexe C

Une théorie de la lumière figée selon la relativité générale

(Une thèse présentée à la réunion de Mars 2011 de l'American Physical Society)

2011 APS March Meeting
March 21–25, 2011, Dallas, Texas

A Theory of Frozen Light According to General Relativity — *by Dmitri Rabounski and Larissa Borissova* — We suggest a theory to frozen light, which was first registered in 2000 by Lene Hau. Frozen light is explained here as a new state of matter. The explanation is given through space-time terms of the General Theory of Relativity. We consider a fully degenerate region of space (space-time), which is the ultimate case of the isotropic region (home of photons), where the metric is particularly degenerate. Both the space-time interval, the observable time interval, and the observable three-dimensional interval are zero in a fully degenerate region. Therefore, we refer to such a region and particles which inhabit it as zero-space and zero-particles. Moving to the coordinate quantities inside zero-space shows that real speed therein is that of light, depending on the gravitational potential and the rotation of space. It is shown that the eikonal equation for zero-particles is a standing wave equation : zero-particles are standing light waves, while zero-space is filled with a system of standing light waves (light-like hologram). With these, zero-particles appear to a regular (external) observer as mere stopped light. This paper has been submitted to *The Abraham Zelmanov Journal*.

Bibliographie

1. Levi-Civita T. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1917, tome 42, pages 173–205.
2. Zelmanov A. Chronometric invariants. Translated into English from the preprint of 1944, American Research Press, Rehoboth (NM), 2006.
3. Zelmanov A. Chronometric invariants and accompanying frames of reference in the General Theory of Relativity. *Soviet Physics Doklady*, MAIK Nauka/Interperiodica, distributed by Springer, 1956, vol. 1, pages 227–230 (translated from *Doklady Academii Nauk USSR*, 1956, vol. 107, no. 6, pages 815–818).
4. Zelmanov A. On the relativistic theory of an anisotropic inhomogeneous universe. Translated from the manuscript of 1957, *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, pages 33–63.
5. Cattaneo C. General Relativity : relative standard mass, momentum, energy, and gravitational field in a general system of reference. *Nuovo Cimento*, 1958, vol. 10, pages 318–337.
6. Cattaneo C. Conservation laws in General Relativity. *Nuovo Cimento*, 1959, vol. 11, pages 733–735.
7. Cattaneo C. On the energy equation for a gravitating test particle. *Nuovo Cimento*, 1959, vol. 13, pages 237–240.
8. Cattaneo C. Problèmes d'interprétation en Relativité Générale. *Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, no. 170 "Fluides et champ gravitationel en Relativité Générale", Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1969, pages 227–235.
9. Hafele J. C. Relativistic behaviour of moving terrestrial clocks. *Nature*, July 18, 1970, vol. 227, pages 270–271.
10. Hafele J. C. Relativistic time for terrestrial circumnavigations. *American Journal of Physics*, 1972, vol. 40, pages 81–85.
11. Hafele J. C. and Keating R. E. Around-the-world atomic clocks : predicted relativistic time gains. *Science*, July 14, 1972, vol. 177, pages 166–168.
12. Hafele J. C. and Keating R. E. Around-the-world atomic clocks : observed relativistic time gains. *Science*, July 14, 1972, vol. 177, pages 168–170.
13. Zelmanov A. L. Relationship of the orthometric monad formalism to chronometric and kinemetric invariants. *Soviet Physics Doklady*, MAIK Nauka/Interperiodica, distributed by Springer, 1976, vol. 21, pages 147–150 (translated from *Doklady Academii Nauk USSR*, 1976, vol. 227, no. 1, pages 78–81).

14. Schouten J. A. und Struik D. J. Einführung in die neuren Methoden der Differentialgeometrie. Noordhoff, Groningen, 1938 (first published in *Zentralblatt für Mathematik*, 1935, Bd. 11 und Bd. 19).
15. Landau L. D. and Lifshitz E. M. The classical theory of . GITTL, Moscow, 1939. Referred with the 4th edition (expanded twice to the 1st edition of 1939), Butterworth–Heinemann, 1980. All the editions were translated in 1951–1980 by Morton Hamermesh.
16. Lie S. Theorie der Transformationsgruppen. First published by Teubner, Leipzig, in 3 volumes (vol. 1, 1888, 568 pages ; vol. 2, 1890, 645 pages ; vol. 3, 1893, 830 pages), reprinted by Chelsea Publishing — American Mathematical Society (NY), 1970, 2,043 pages.
17. Killing W. Über die Grundlagen der Geometrie. *Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 109, 1892.
18. Petrov A. Z. Einstein spaces. Pergamon Press, Oxford, 1969 (translated by R. F. Kelleher, edited by J. Woodrow).
19. Rabounski D. and Borissova L. Exact theory to a gravitational wave detector. New experiments proposed. *Progress in Physics*, 2006, vol. 2, pages 31–38.
20. Rabounski D. and Borissova L. Exact solution for a gravitational wave detector. A presentation posted at the *2008 APS April Meeting*, held in April 12–15, 2008, in St. Louis, Missouri.
21. Borissova L. Gravitational Waves and Gravitational Inertial Waves According to the General Theory of Relativity. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2010, vol. 3, pages 25–70
22. Weber J. General Relativity and gravitational waves. Interscience Publishers, New York, 1961 (referred with the reprint by Dover Publications, Mineola, NY, 2004).
23. Synge J. L. Relativity : the general theory. North Holland, Amsterdam, 1960 (referred with the 2nd edition, Foreign Literature, Moscow, 1963).
24. Weber J. Gravitational-wave-detector events. *Physical Review Letters*, 1968, vol. 20, pages 1307–1308.
25. Weber J. Evidence for discovery of gravitational radiation. *Physical Review Letters*, 1969, vol. 22, pages 1320–1324.
26. Weber J. Gravitational radiation experiments. *Physical Review Letters*, 1970, vol. 24, 276–279.
27. Borissova L. Quadrupole mass-detector in a field of weak plane gravitational waves. *Russian Physics Journal*, Springer New York, 1978, vol. 21, no. 10, pages 1341–1344 (translated from *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii*, *Fizika*, 1978, no. 10, pages 109–114).
28. Lefschetz S. Differential equations : geometric theory. Interscience Publishers, New York, 1957.

29. Kamke E. Differentialgleichungen : Lösungsmethoden und Lösungen. Chelsea Publ. Co., New York, 1959.

30. Boschi D., Branca S., De Martini F., Hardy L., and Popescu S. Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, pages 1121–1125.

31. Riebe M., Häffner H., Roos C. F., Hänsel W., Benhelm J., Lancaster G. P. T., Korber T. W., Becher C., Schmidt-Kaler F., James D. F. V., and Blatt R. Deterministic quantum teleportation with atoms. *Nature*, 2004, vol. 429, pages 734–736.

32. Barrett M. D., Chiaverini J., Schaetz T., Britton J., Itano W. M., Jost J. D., Knill E., Langer C., Leibfried D., Ozeri R., and Wineland D. J. Deterministic quantum teleportation of atomic qubits. *Nature*, 2004, vol. 429, pages 737–739.

33. Bennett C. H., Brassard G., Crepeau C., Jozsa R., Peres A., and Wootters W. K. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, 1993, vol. 70, pages 1895–1899.

34. Zelmanov A. L. On the formulation of the problem of the infinity of space in the General Theory of Relativity. *Soviet Physics Doklady*, MAIK Nauka/Interperiodica, distributed by Springer, 1959, vol. 4, pages 161–164 (translated from *Doklady Academii Nauk USSR*, 1959, vol. 124, no. 5, pages 1030–1033).

35. Rabounski D. Biography of Abraham Zelmanov (1913–1987). *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, pages xx–xxvi.

36. Rabounski D. and Borissova L. A theory of frozen light according to General Relativity. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2011, vol. 4, pages 3–27.

37. Rabounski D. and Borissova L. A theory of frozen light according to General Relativity. A presentation posted at the *2011 APS March Meeting*, held in March 21–25, 2011, in Dallas, Texas.

38. Hau L. V., Harris S. E., Dutton Z., Behroozi C. H. Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas. *Nature*, 18 February 1999, vol. 397, 594–598.

39. Liu C., Dutton Z., Behroozi C. H., Hau L. V. Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses. *Nature*, 25 January 2001, vol. 409, 490–493.

40. Dutton Z., Budde M., Slowe C., Hau L. V. Observation of quantum shock waves created with ultra-compressed slow light pulses in a Bose-Einstein condensate. *Science*, 27 July 2001, vol. 293, 663–668.

41. Hau L. V. Frozen light. *Scientific American*, 17 July 2001, vol. 285, no. 1, 52–59.

42. Hau L. V. Frozen light. *Scientific American Special Edition* "*The Edge of Physics*", 31 May 2003, 44–51.

43. Zhang R., Garner S. R., Hau L. V. Creation of long-term coherent optical memory via controlled nonlinear interactions in Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, 4 December 2009, vol. 103, 233602.

44. Phillips D. F., Fleischhauer A., Mair A., Walsworth R. L., Lukin M. D. Storage of light in atomic vapor. *Physical Review Letters*, 29 January 2001, vol. 86, no. 5, 783–786.

45. Turukhin A. V., Sudarshanam V. S., Shahriar M. S., Musser J. A., Ham B. S., Hemmer P. R. Observation of ultraslow and stored light pulses in a solid. *Physical Review Letters*, 14 January 2002, vol. 88, no. 2, 023602.

À propos des auteurs

Dmitri Rabounski (né en 1965, à Moscou, Russie), est l'ancien élève de l'École Supérieure de Physique de Moscou. Dès 1983, il suit l'enseignement du Prof. Kyril Stanyukovich (1916–1989), le spécialiste éminent de la dynamique des gaz en relativité générale. Il suit également l'enseignement du Dr. Abraham Zelmanov (1913–1987), cosmologiste réputé et spécialiste de la relativité générale, et au cours des années 80, celui du Dr. Vitaly Bronshten (1913–2004), expert réputé dans le domaine de la destruction des corps en atmosphère. Dmitri Rabounski a publié près de 30 articles scientifiques et 6 ouvrages couvrant la relativité générale, la gravitation, la physique des météoroides et l'astrophysique. En 2005, Dmitri Rabounski a fondé un nouveau journal de physique américain, *Progress in Physics*, qu'il dirige en tant qu'éditeur en chef. En 2008, Dmitri Rabounski a fondé un nouveau journal international spécialisé en relativité générale, *The Abraham Zelmanov Journal*, qu'il dirige en tant qu'éditeur en chef, tout en poursuivant ses études scientifiques comme chercheur indépendant.

Larissa Borissova (née en 1944, à Moscou, Russie) est ancienne élève de la Faculté d'Astronomie, Département de Physique de l'Université d'état de Moscou. Elle a débuté en 1964 en suivant l'enseignement du Dr. Abraham Zelmanov (1913–1987), l'éminent cosmologiste et chercheur en relativité générale. En 1968, elle suit également l'enseignement du Prof. Kyril Stanyukovich (1916–1989), le spécialiste renommé de la dynamique des gaz en relativité générale. En 1975, Larissa Borissova reçoit son doctorat d'état, qui couronne ses travaux sur les ondes gravitationnelles. Larissa Borissova a publié près de 30 articles scientifiques, et 6 ouvrages sur la relativité générale et la gravitation. En 2005, elle devient cofondatrice et éditeur associée du journal *Progress in Physics*. En 2008, elle devient éditeur associée du journal *The Abraham Zelmanov Journal*. Elle poursuit depuis, ses études scientifiques en tant que chercheuse indépendante.

PARTICULES DE L'UNIVERS ET AU DELÀ DU MIROIR

par Dmitri Rabounski et Larissa Borissova

Il s'agit d'une étude qui porte sur toutes les sortes de particules concevables qui se meuvent dans l'espace-temps de la relativité générale. En dehors des particules massives et de celles du genre lumière, nous envisageons ici des zéro-particules : de telles particules peuvent exister dans une région de l'espace-temps complètement dégénéré (zéro-espace). Les zéro-particules sont assimilables à des ondes lumineuses stationnaires qui se déplacent instantanément (téléportation non quantique des photons) ; elles pourraient être observées lors d'un développement ultérieur de "l'expérience portant sur l'interruption de la lumière", qui fût d'abord menée à Harvard en 2000, USA. L'existence théorique de deux régions séparées de l'espace-temps où le temps observable s'écoule vers le futur et dans le passé (notre Univers et l'Univers miroir), est alors mise en évidence. Ces régions sont séparées par une membrane d'espace-temps où le temps observable s'arrête. Plusieurs autres problèmes sont abordés. Il est par exemple montré à travers les équations de Killing que le mouvement géodésique des particules résulte d'une rotation géodésique stationnaire de l'espace qui les contient. Concernant la théorie des détecteurs d'ondes gravitationnelles, il est également démontré que les détecteurs dépourvus de masse ainsi que les détecteurs massifs ne peuvent enregistrer une onde de gravitation que si leurs extrémités sont soumises à une oscillation.

ISBN 978-1-59973-267-1
Première édition en langue française
American Research Press, 2012, 132 pages
Printed in the USA / Imprimé aux États Unis

US $36.00 / EUR €27.00

ISBN 978-1-59973-267-1
9 781599 732671 >